

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



TRABAJO FIN DE MÁSTER

**Desarrollo del método de los elementos
finitos para el análisis y diseño de
dispositivos de radiocomunicaciones en
guíaonda de tipo plano H y plano E**

Máster Universitario en Ingeniería de Telecomunicación

Autor: ANTEQUERA GONZÁLEZ, Álvaro

Tutor: CÓRCOLES ORTEGA, Juan

Departamento de Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones

FECHA: Septiembre, 2018

**DESARROLLO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS
FINITOS PARA EL ANÁLISIS Y DISEÑO DE
DISPOSITIVOS DE RADIOCOMUNICACIONES EN
GUÍAONDA DE TIPO PLANO H Y PLANO E**

**AUTOR: Álvaro Antequera González
TUTOR: Juan Córcoles Ortega**

**Radiofrecuencia: Circuitos, Antenas y Sistemas (RFCAS)
Dpto. Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones (TEC)
Escuela Politécnica Superior
Universidad Autónoma de Madrid
Septiembre de 2018**

Agradecimientos

En primer lugar dar las gracias a mi tutor, Juan Córcoles Ortega, por su generosa ayuda en el desarrollo de este trabajo, y los conocimientos que me ha aportado durante el desarrollo del mismo.

También dar las gracias a Raúl Haro Báez, que generosamente me ha aportado los datos necesarios para poder comparar los resultados del acoplador de ocho puertas y su ayuda para la compresión del dispositivo.

También agradecer a mi familia cuyo apoyo y ánimos me han ayudado durante esta etapa de mi vida.

Por último agradecer a mis amigos, que durante este tiempo me han ayudado tanto.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 MOTIVACIÓN	1
1.2 OBJETIVOS.....	1
1.3 ORGANIZACIÓN DE LA MEMORIA	2
2 ESTADO DEL ARTE	3
2.1 ECUACIONES DE MAXWELL	3
2.1.1 <i>Condiciones de frontera</i>	4
2.2 ECUACIÓN DE HELMHOLTZ.....	5
2.3 GUÍA DE ONDA	6
2.3.1 <i>Guía de onda rectangular</i>	6
2.4 MATRIZ DE DISPERSIÓN.....	8
2.4.1 <i>Propiedades de la matriz de dispersión</i>	10
2.5 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	11
2.5.1 <i>Preprocesado</i>	12
2.5.2 <i>Construcción de matrices</i>	13
2.5.3 <i>Montaje de la matriz global</i>	13
2.5.4 <i>Resolución del sistema de ecuaciones</i>	14
2.5.5 <i>Posprocesado</i>	14
2.5.6 <i>FEniCS</i>	14
2.6 DISCONTINUIDADES.....	15
3 INTRODUCCIÓN AL FEM	17
3.1 FORMULACIÓN	18
3.2 IMPLEMENTACIÓN.....	20
3.3 RESULTADOS.....	21
4 PLANO H	27
4.1 FORMULACIÓN	27
4.2 IMPLEMENTACIÓN.....	31
4.3 COMPROBACIÓN FORMULACIÓN	33
4.3.1 <i>Guía λ</i>	33
4.3.2 <i>Guía $\lambda/2$</i>	34
4.3.3 <i>Guía $\lambda/4$</i>	35
4.4 ANÁLISIS DE DISPOSITIVOS	36
4.4.1 <i>Guía de onda rectangular con un iris</i>	36
4.4.2 <i>Filtro RSE-Down TE_{103}</i>	39
4.4.3 <i>Acoplador ocho puertos</i>	41
5 PLANO E.....	52
5.1 FORMULACIÓN	52
5.2 IMPLEMENTACIÓN.....	56
5.3 COMPROBACIÓN FORMULACIÓN	57
5.3.1 <i>Guía λ</i>	58
5.3.2 <i>Guía $\lambda/2$</i>	59
5.3.3 <i>Guía $\lambda/4$</i>	59
5.4 ANÁLISIS DE DISPOSITIVOS	60
5.4.1 <i>Primer modelo de divisor</i>	60
5.4.2 <i>Segundo modelo de divisor</i>	63
5.4.3 <i>Tercer modelo de divisor</i>	66
6 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.....	69

6.1 CONCLUSIONES.....	69
6.2 TRABAJO FUTURO	69
REFERENCIAS	71
GLOSARIO	73
ANEXOS	I
A DIMENSIONES ACOPLADOR DE 8 PUERTAS	I

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Condiciones de frontera [1]	4
Figura 2.2: Guía de onda [5]	6
Figura 2.3: Guía de onda rectangular [5]	6
Figura 2.4: Red genérica N Puertos [5]	9
Figura 2.5: Elemento nodal y vectorial [5]	12
Figura 2.6: Mesh [1]	13
Figura 2.7: Ensamblaje [3]	13
Figura 2.8: Discontinuidad rectangular [1]	15
Figura 2.9: Discontinuidad en escalón [5]	15
Figura 3.1: Guía de onda conductora de sección rectangular [5]	17
Figura 3.2: Sección transversal modelo 1. Nº Elementos: 702. Grados de Libertad:1822	21
Figura 3.3: Sección transversal modelo 2. Nº Elementos: 702. Grados de Libertad: 1822	22
Figura 3.4: Sección transversal modelo 3. Nº Elementos: 702. Grados de Libertad: 1822	22
Figura 4.1: Plano H genérico [1]	27
Figura 4.2: Guía plano H comprobación [1]	33
Figura 4.3: Mesh guía rectangular λ plano H. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	34
Figura 4.4: Mesh guía rectangular $\lambda/2$ plano H. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	35
Figura 4.5: Mesh guía rectangular $\lambda/4$ plano H. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	36
Figura 4.6: Guía de onda rectangular con un iris	37
Figura 4.7: Mesh guía de onda rectangular con iris. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	37
Figura 4.8: Amplitud matriz S guía rectangular con iris	38
Figura 4.9: Fase matriz S guía rectangular con iris	38
Figura 4.10: Filtro RSE-Down TE_{103}	39
Figura 4.11: Mesh filtro RSE-Down TE_{103} . Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	40
Figura 4.12: Amplitud matriz S Filtro RSE-Down TE_{103}	40
Figura 4.13: Fase matriz S Filtro RSE-Down TE_{103}	41
Figura 4.14: Acoplador ocho puertos	41
Figura 4.15: Mesh acoplador ocho puertos. Nº Elementos: 1256. Grados de Libertad: 3014	42
Figura 4.16: Módulo S_{11} acoplador	43
Figura 4.17: Fase S_{11} acoplador	43
Figura 4.18: Módulo S_{21} acoplador	44
Figura 4.19: Fase S_{21} acoplador	44
Figura 4.20: Módulo S_{31} acoplador	45
Figura 4.21: Fase S_{31} acoplador	45
Figura 4.22: Módulo S_{41} acoplador	46
Figura 4.23: Fase S_{41} acoplador	46
Figura 4.24: Módulo S_{51} acoplador	47
Figura 4.25: Fase S_{51} acoplador	47
Figura 4.26: Módulo S_{61} acoplador	48
Figura 4.27: Fase S_{61} acoplador	48
Figura 4.28: Módulo S_{71} acoplador	49
Figura 4.29: Fase S_{71} acoplador	49
Figura 4.30: Módulo S_{81} acoplador	50
Figura 4.31: Fase S_{81} acoplador	50
Figura 5.1: Plano E genérico [1]	52

Figura 5.2: Guía plano E comprobación [1]	57
Figura 5.3: Mesh guía rectangular λ plano E. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	58
Figura 5.4: Mesh guía rectangular $\lambda/2$ plano E. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	59
Figura 5.5: Mesh guía rectangular $\lambda/4$ plano E. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	60
Figura 5.6: Modelo 1 divisor de potencia plano E	61
Figura 5.7: Mesh modelo 1 divisor de potencia plano E. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044	62
Figura 5.8: Módulo matriz S divisor modelo 1	62
Figura 5.9: Fase matriz S divisor modelo 1	63
Figura 5.10: Modelo 2 divisor de potencia plano E	63
Figura 5.11: Mesh modelo 2 divisor de potencia plano E. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044 ..	64
Figura 5.12: Módulo matriz S divisor modelo 2	65
Figura 5.13: Fase matriz S divisor modelo 2	65
Figura 5.14: Modelo 3 divisor de potencia plano E	66
Figura 5.15: Mesh modelo 3 divisor de potencia plano E. Nº Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044 ..	67
Figura 5.16: Módulo matriz S divisor modelo 3	67
Figura 5.17: Fase matriz S divisor modelo 3	68

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1: Dimensiones sección transversal línea rectangular	20
Tabla 3.2: Valores teóricos frente a FEM	23
Tabla 3.3: Número de onda al cuadrado modelo 1 modos TE	24
Tabla 3.4: Número de onda al cuadrado modelo 1 modos TM	24
Tabla 3.5: Número de onda al cuadrado modelo 2 modos TE	24
Tabla 3.6: Número de onda al cuadrado modelo 2 modos TM	25
Tabla 3.7: Número de onda al cuadrado modelo 3 modos TE	25
Tabla 3.8: Número de onda al cuadrado modelo 3 modos TM	25
Tabla 4.1: Parámetros guía de onda genérica	33
Tabla 4.2: FEM vs Teórico longitud λ	34
Tabla 4.3: FEM vs Teórico longitud $\lambda/2$	35
Tabla 4.4: FEM vs Teórico longitud $\lambda/4$	36
Tabla 4.5: Dimensiones guía de onda rectangular con un iris	37
Tabla 4.6: Dimensiones filtro RSE-Down TE_{103}	39
Tabla 5.1: Parámetros guía de onda genérica	58
Tabla 5.2: FEM vs Teórico longitud λ	58
Tabla 5.3: FEM vs Teórico longitud $\lambda/2$	59
Tabla 5.4: FEM vs Teórico longitud $\lambda/4$	60
Tabla 5.5: Dimensiones modelo 1 divisor de potencia plano E	61
Tabla 5.6: Dimensiones modelo 2 divisor de potencia plano E	64
Tabla 5.7: Dimensiones modelo 3 divisor de potencia plano E	66

1 Introducción

1.1 Motivación

A día de hoy el diseño de una red de microondas de alto rendimiento requiere una caracterización precisa de cada componente. Estos componentes pueden ser complejos de analizar tanto por su composición de materiales como por su geometría. Cuando se analiza un componente de microondas, lo que más interesa como diseñadores es conocer el comportamiento del componente cuando se excita con un determinado campo incidente.

Para la descripción de las leyes de la física en los problemas dependientes del espacio y el tiempo generalmente se expresa en ecuaciones de derivadas parciales (PDEs) [1]. En el caso de dispositivo en guía de onda estas PDEs vienen expresadas en las ecuaciones de Maxwell las cuales describen todos los fenómenos electromagnéticos. Pero para la gran mayoría de las geometrías estas PDEs no se pueden resolver con el método analítico o son muy costosas de llevar a cabo. En cambio, se puede construir una aproximación de las ecuaciones, generalmente basadas en diferentes tipos de discretización. Estos métodos de discretización se aproximan a las PDEs con ecuaciones de modelos numéricos. La aproximación que se obtiene mediante los métodos de discretización es muy cercana a las resoluciones obtenidas mediante PDE. Para llevar a cabo estas aproximaciones se utiliza el método de elementos finitos (FEM) [2].

La aplicación de FEM [2] sobre componentes de microondas da lugar a un problema determinístico, cuya solución da lugar a la distribución del campo dentro del componente, tras lo cual y mediante una fase de posprocesado se puede obtener la matriz de scattering. Gracias a la matriz S obtenemos los parámetros S , que juegan un papel muy importante en el diseño de dispositivos de microondas ya que relacionan los voltajes y las corrientes de entrada y salida de cada puerto del dispositivo de microondas a analizar en términos de ondas de potencia.

1.2 Objetivos

El objetivo de este trabajo de fin de master es diseñar un programa que permita obtener y analizar dispositivos de radiofrecuencia en guía de onda rectangular de dos o más puertas tanto en plano E como en plano H. El resultado de este programa será la matriz de parámetros S , los cuales se representarán tanto en módulo como en fase. El programa empleará el método de elementos finitos para la obtención de los parámetros S , y permitirá al usuario introducir la geometría del dispositivo a analizar, con la única condición de que las puertas del dispositivo se encuentren paralelas en el mismo eje horizontal (Eje y). Con este programa se analizaran distintos filtros para la comprobación del correcto funcionamiento del programa.

Para la programación se empleará el lenguaje de programación de Python, más concretamente el paquete de FEniCS [3]. FEniCS es un paquete que contiene una colección de softwares de código abierto que permite trabajar con PDEs y permite su resolución mediante FEM.

Adicionalmente se analizará un dispositivo más complejo, un acoplador de ocho puertas en plano H. Este acoplador de ocho puertas estará basado en una guía de onda rectangular estándar WR-51 [4]. Para el análisis de este dispositivo se ha generado un código específico del caso genérico también basado en la herramienta de FEniCS.

1.3 Organización de la memoria

La memoria consta de los siguientes capítulos:

- **Capítulo 1: Introducción.** Motivación, objetivos y organización.
- **Capítulo 2: Estado del arte.** Resumen de los conceptos teóricos empleados para desarrollar la formulación de los dispositivos de radiofrecuencia en plano E y plano H.
- **Capítulo 3: Introducción al FEM.** Introducción al método de elementos finitos con distintos ejemplos/ejercicios.
- **Capítulo 4: Plano H.** En este capítulo se presentará el desarrollo matemático realizado sobre los dispositivos de guía de onda plano H, la comprobación de este desarrollo matemático con un ejemplo sencillo y la presentación de distintos dispositivos y sus respectivos análisis.
- **Capítulo 5: Plano E.** En este capítulo se presentará el desarrollo matemático realizado sobre los dispositivos de guía de onda plano E, la comprobación de este desarrollo matemático con un ejemplo sencillo y la presentación de distintos dispositivos y sus respectivos análisis.
- **Capítulo 6: Conclusiones y trabajo futuro.** En este capítulo se presentarán las conclusiones extraídas tras la realización de este trabajo así como las futuras líneas de trabajo que se dejan abiertas en el TFM.

2 Estado del arte

2.1 Ecuaciones de Maxwell

El trabajo que realizó Maxwell [5] se basó en un gran número de estudios y pruebas que realizaron y desarrollaron físicos como Gauss, Ampere, Faraday entre otros. Su trabajo consistió en unificar todas las leyes y las ecuaciones clásicas de la electricidad y el magnetismo desde un enfoque genérico, haciendo que las leyes y ecuaciones conocidas y estudiadas hasta entonces pasaran a ser casos específicos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. A estas ecuaciones del electromagnetismo se las ha conocido como la “segunda gran unificación en física”.

Las ecuaciones de Maxwell [5] [6] en su forma diferencial son:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Donde,

\vec{E} Intensidad del campo eléctrico en V/m,

\vec{H} Intensidad del campo magnético en A/m,

\vec{D} Densidad del flujo del campo eléctrico en C/m²,

\vec{B} Densidad del flujo del campo magnético en W/m²,

\vec{M} Densidad de corriente magnética (ficticia) en V/m²,

\vec{J} Densidad de corriente eléctrica en A/m²,

ρ Densidad de carga eléctrica en C/m³.

La fuente del campo electromagnético son las corrientes \vec{M} , \vec{J} y la carga eléctrica ρ . Cuando se dice que \vec{M} es una fuente de corriente magnética ficticia se dice en el sentido de que solo se utiliza por conveniencia matemática, ya que la verdadera fuente de corriente magnética es siempre un bucle de corriente eléctrica.

En el vacío, se cumple la siguiente relación entre la intensidad del campo eléctrico y magnético con las densidades de flujo:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.6)$$

Donde la permeabilidad magnética del vacío es $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m y la permitividad eléctrica del vacío es $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Las ecuaciones anteriores son válidas para la dependencia arbitraria del tiempo, pero en los casos con los que trabajaremos los campos tendrán una dependencia del tiempo sinusoidal o

armónica, pudiendo utilizar la formulación fasorial $\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\vec{E}(x, y, z)e^{-j\omega t}]$. Esto hace que se pueda eliminar el término $e^{-j\omega t}$, y sustituir la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial t}$ por $j\omega$, siendo ω la frecuencia en radianes. Utilizando la notación fasorial en todos los términos de la ecuaciones (2.1) a (2.4) se obtiene:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} - \vec{M} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.10)$$

Si se asume el medio de propagación como lineal, las ecuaciones de Maxwell quedarían como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} - \vec{M} \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} + \vec{J} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.14)$$

2.1.1 Condiciones de frontera

Consideremos una interfaz plana entre dos medios (Figura 2.1). Existen varios casos de fronteras, pero en nuestro caso siempre que utilicemos en el desarrollo de este trabajo las condiciones de frontera nos referiremos a un dieléctrico con un conductor perfecto [6].

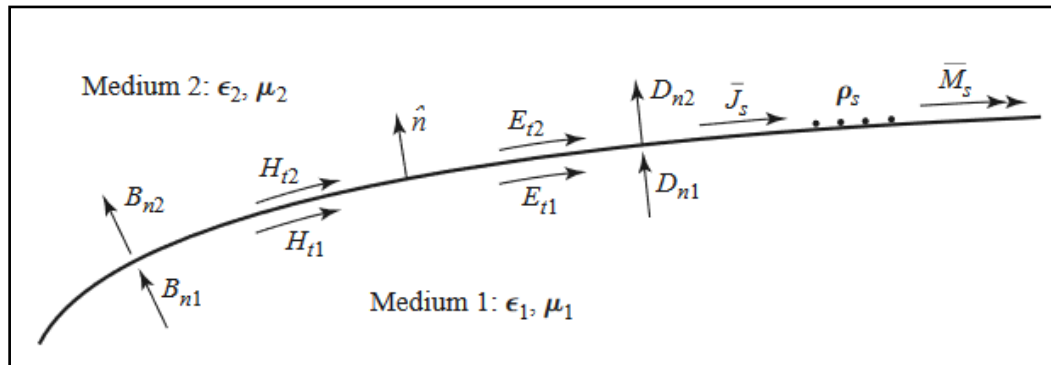


Figura 2.1: Condiciones de frontera [1]

Al ser un conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$), todos los componentes de todos los campos dentro de la región del conductor deben ser cero y $\vec{M} = 0$, entonces las condiciones de contorno para una interfaz entre un conductor perfecto y un dieléctrico sería [6]:

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (2.15)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (2.17)$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (2.18)$$

Donde \hat{n} , como se puede ver en la figura 2.1, es el vector normal a la superficie de separación entre los dos medios y que va del medio 1 al 2.

2.2 Ecuación de Helmholtz

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell (2.11) y (2.12), y asumiendo que el medio de transmisión es isotrópico y homogéneo sin fuentes, las ecuaciones quedan como [6]:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (2.20)$$

Donde \vec{E} y \vec{H} son desconocidas. El desarrollo que se empleará a continuación se resolverá para el campo \vec{E} , pero el desarrollo sería el mismo para el campo \vec{H} [5]. Para resolver este sistema de ecuaciones utilizamos la fórmula (2.20) en la ecuación (2.19) obteniendo:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \vec{H}) = \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} \quad (2.21)$$

Mediante la siguiente propiedad:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.22)$$

Donde \vec{A} es un vector genérico. Aplicando esta propiedad a la fórmula (2.21) se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = 0 \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) es la ecuación de onda o ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico. Para obtener la ecuación de Helmholtz del campo magnético se siguen los mismos pasos que para el campo eléctrico. Primero se sustituye la ecuación (2.19) en (2.20) y se aplica la propiedad (2.22) [6]. La ecuación de Helmholtz para el campo magnético es:

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = 0 \quad (2.24)$$

De las fórmulas de Helmholtz (2.23) y (2.24) se obtiene lo que se conoce como la constante de propagación del medio $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ cuya dimensión es 1/m. Sustituyendo la constante de propagación en las ecuaciones (2.23) y (2.24) finalmente las ecuaciones de Helmholtz para el campo eléctrico y magnético quedan como:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2\vec{H} = 0 \quad (2.26)$$

A partir de las dos ecuaciones generales de la ecuación de Helmholtz podemos deducir la formulación escalar de estas ecuaciones, para un sistema con simetría de traslación como una guía de onda indefinida. Para ello, la función vectorial del campo eléctrico y magnético pueden dividirse en su parte longitudinal y transversal, $\vec{E} = \vec{E}_t + E_z\hat{z}$ y $\vec{H} = \vec{H}_t + H_z\hat{z}$ [5]. Aplicando esta división en las ecuaciones (2.25) y (2.26) y aplicando el método de separación de variables llegamos a la ecuación escalar:

$$\nabla_t^2 e_z(u1, u2) + k^2 e_z(u1, u2) = 0 \quad (2.27)$$

2.3 Guía de onda

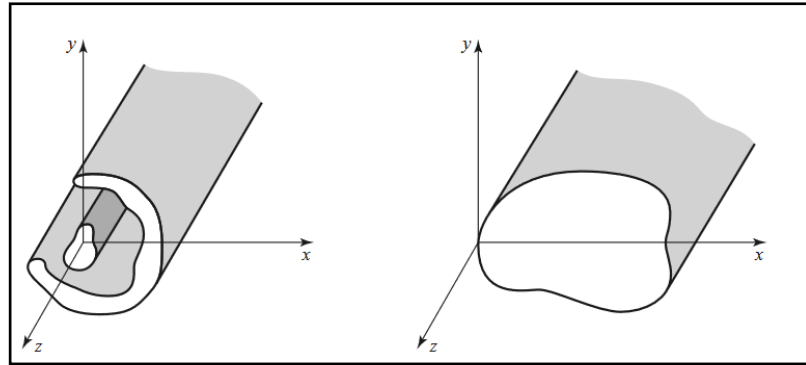


Figura 2.2: Guía de onda [5]

Uno de los primeros hitos en la ingeniería de microondas fue el desarrollo de las líneas de transmisión (Figura 2.2). En 1897, Lord Rayleigh (John William Strutt) demostró matemáticamente que la propagación de ondas en las guías de onda era posible para secciones transversales circulares y rectangulares. Rayleigh también notó que existían un conjunto infinito de modos TE y TM que eran posibles transmitir en la guía de onda. Aunque cada vez es mayor el uso de circuitos de microondas que se fabrica sobre líneas de transmisión planas como la microstrips y stripline en lugar de guías de onda, las guías de onda siguen siendo usadas para una gran parte de sistemas de telecomunicación como satélites, sistemas de alta potencia o algunas aplicaciones para pruebas de precisión [5].

Las guías de onda, normalmente formadas por un solo conductor, soportan los ondas transversales eléctricas (TE) y/o los transversales magnéticas (TM), caracterizadas por la presencia de las componentes longitudinales magnéticas o eléctricas.

En este trabajo se emplearán guías de onda rectangulares, por lo tanto nos centraremos en el desarrollo de los modos TE y TM aplicados a este caso específico.

2.3.1 Guía de onda rectangular

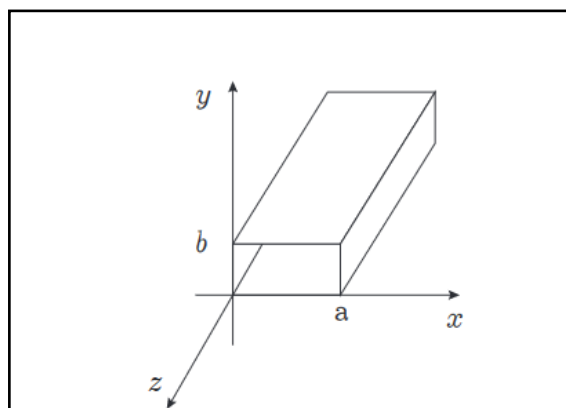


Figura 2.3: Guía de onda rectangular [5]

Las guías de ondas rectangulares se utilizan como componentes para diversos dispositivos de microondas como los acopladores, detectores, atenuadores, etc. Las guías de ondas rectangulares pueden propagar modos TE y TM [5], pero no modos TEM ya que las guías rectangulares están formadas exclusivamente por un conductor.

2.3.1.1 Modo TE

Considerando la geometría según la figura 2.3, las guías de ondas con modo TE se caracterizan por $E_z = 0$ y H_z debe satisfacer [5]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) h_z(x, y) = 0 \quad (2.28)$$

Siendo $H_z(x, y, z) = h_z(x, y)e^{-j\beta z}$ y $k_c = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ el número de onda [6]. La ecuación (2.28) se puede resolver mediante el método de separación de variables.

La solución general para h_z obtenida mediante el método de separación de variables es:

$$h_z(x, y) = (A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x))(C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)) \quad (2.29)$$

Aplicando las condiciones de frontera al campo eléctrico obtenemos los valores de las constantes de la ecuación (2.29) $D=0$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$ con $n=0, 1, 2, \dots$, $B=0$ y $k_x = \frac{m\pi}{a}$ con $m=0, 1, 2, \dots$. Donde n y m no pueden ser cero al mismo tiempo. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.29) obtenemos la solución final para H_z :

$$H_z(x, y, z) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \quad (2.30)$$

A partir de la ecuación anterior, obtenemos las componentes del campo transversal [5] para el modo TE_{mn} :

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \quad (2.31)$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \quad (2.32)$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \quad (2.33)$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \quad (2.34)$$

Donde la constante de propagación β es [6]:

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.35)$$

Donde el número de onda k_c [6] es:

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.36)$$

Y la frecuencia de corte [5] para el modo TE_{mn} :

$$f_{cmn} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.37)$$

El modo dominante en la guía rectangular es el modo TE_{10} .

2.3.1.2 Modo TM

Considerando la geometría según la figura 2.3, las guías de ondas con modo TM se caracterizan por $H_z = 0$ y E_z debe satisfacer:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) e_z(x, y) = 0 \quad (2.38)$$

Con $E_z(x, y, z) = e_z(x, y)e^{-j\beta z}$ y $k_c = \sqrt{k^2 - \beta^2}$. Igual que en el modo TE se utiliza el método de separación de variables para obtener la solución general y aplicando las condiciones de frontera [5] obtenemos que la solución para E_z es:

$$E_z(x, y, z) = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z} \quad (2.39)$$

Donde $n=1,2,\dots$ y $m=1,2,\dots$. Las componentes del campo transversal para los modos TM_{mn} son [6]:

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \quad (2.40)$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \quad (2.41)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \quad (2.42)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \quad (2.43)$$

2.4 Matriz de Dispersión

La matriz de dispersión proporciona una descripción completa de una red con N puertos, relacionando las ondas incidente en los puertos con las ondas reflejada en puertos [6]. Conociendo la matriz de parámetros de dispersión se puede convertir a otras matrices de parámetros (Z , Y , $ABCD\dots$) en caso de ser necesario.

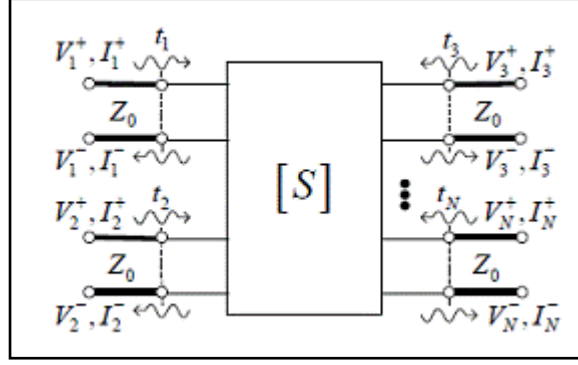


Figura 2.4: Red genérica N Puertos [5]

Consideremos una red de N puertos (Figura 2.4), donde V_n^+ es la amplitud de la onda incidente en el puerto n y V_n^- es la amplitud de la onda reflejada en el puerto n. De esta red genérica, podemos definir la relación de la amplitud de las ondas incidentes y reflejadas de la siguiente manera [5]:

$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \\ \vdots \\ V_N^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ \vdots \\ V_N^+ \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Donde los elementos de la matriz anterior (parámetros de dispersión) se definen como:

$$S_{ij} = \left. \frac{V_i^-}{V_j^+} \right|_{V_k^+ = 0 \text{ para } k \neq j} \quad (2.45)$$

Para obtener el parámetro S_{ij} , las ondas incidentes en los puertos excepto el puerto j se ponen a cero, esto significa que los puertos que no se midan se deberán cargar con una impedancia adecuada para evitar ondas reflejadas [5].

Por lo tanto, S_{ii} es el coeficiente de reflexión visto en el puerto i cuando los demás puertos se cargan con las impedancias características y S_{ij} es el coeficiente de transmisión desde el puerto j al puerto i cuando todos los demás puertos se cargan con las impedancias características.

Para obtener la definición de la matriz de dispersión en función de la onda de potencia reflejada (b) e incidente (a) realizamos la siguiente operación:

$$a_N = \frac{V_N^+}{\sqrt{Z_0}} \quad (2.46)$$

$$b_N = \frac{V_N^-}{\sqrt{Z_0}} \quad (2.47)$$

Donde Z_0 es la impedancia característica del sistema [5]. La matriz de dispersión con estos parámetros se define como:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

2.4.1 Propiedades de la matriz de dispersión

Considerando un dispositivo de microondas lineal y sin pérdidas se pueden demostrar varias propiedades para la matriz de dispersión que serán útiles en desarrollos posteriores del trabajo.

En el caso general, cuando una onda de voltaje incide en todos los puertos, cada onda incidente hará una contribución a la onda total resultante que sale del puerto “i” [5]:

$$b_i = S_{i1}a_1 + S_{i2}a_2 + \cdots + S_{iN}a_N \quad (2.49)$$

La potencia tanto de la onda incidente como la reflejada en el puerto “j” es:

$$P_{ent.j} = a_j a_j^* \quad (2.50)$$

$$P_{sal.j} = b_j b_j^* \quad (2.51)$$

Por lo tanto, por la conservación de la energía se debe cumplir:

$$a_1 a_1^* = b_1 b_1^* + b_2 b_2^* + \cdots + b_N b_N^* \quad (2.52)$$

Como $b_i = S_{i1}a_1$, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$a_1 a_1^* = (S_{11}a_1)(S_{11}a_1)^* + (S_{21}a_1)(S_{21}a_1)^* + \cdots + (S_{N1}a_1)(S_{N1}a_1)^* \quad (2.53)$$

$$1 = S_{11}S_{11}^* + S_{21}S_{21}^* + \cdots + S_{N1}S_{N1}^* \quad (2.54)$$

De manera genérica [5]:

$$1 = \sum_j S_{ij}S_{ij}^* = \sum_j |S_{ij}|^2 \quad (2.55)$$

La siguiente propiedad también se puede derivar del principio de la conservación de la energía.

En todo sistema sin pérdidas se debe cumplir que $P_{ent}=P_{sal}$:

$$\sum_j a_j a_j^* = \sum_k b_k b_k^* \quad (2.56)$$

Tras desarrollar esta expresión se obtiene:

$$0 = 2Re \sum_m \sum_n (\sum_j S_{jm}S_{jn}^*) a_m a_n^* \quad (2.57)$$

Esta ecuación es válida si se transmiten dos ondas a_1, a_2 en los puertos 1,2 con los demás $a_j=0$. Siendo así la ecuación (2.57) se simplifica como:

$$0 = 2Re(S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* + \dots + S_{n1}S_{n2}^*)a_1a_2^* \quad (2.58)$$

Como las fases de las ondas transmitidas a_1, a_2 son arbitrarias, entonces la igualdad queda:

$$0 = S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* + S_{31}S_{32}^* + \dots + S_{n1}S_{n2}^* \quad (2.59)$$

Expresando en palabras la ecuación (2.59) dice que el resultado del producto de cualquier columna de la matriz S con el conjugado de otra columna es igual a cero para redes sin pérdidas [5].

Por último, una propiedad útil de conocer para la matriz de dispersión es la de simetría. En las redes de microondas recíprocas, la matriz de dispersión:

$$[S] = [S]^t \quad (2.60)$$

Donde $[S]^t$ es la matriz de dispersión transpuesta. Esta propiedad indica que la matriz de dispersión es simétrica respecto a la diagonal principal.

2.5 Método de Elementos Finitos

Muchos procesos físicos de la naturaleza están descritos por ecuaciones que involucran tanto magnitudes físicas como sus variaciones espaciales o temporales (derivadas parciales). En el caso que trata este trabajo este proceso físico es el electromagnetismo y las derivadas parciales que las definen son las ecuaciones de Helmholtz.

Para la mayor parte de ecuaciones en derivadas parciales no es posible encontrar una solución exacta de forma analítica o incluso determinar si una solución es la única posible. Es por ello que para estos casos un enfoque para su resolución es la aproximación mediante métodos numéricos. Una de las herramientas para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales es el Método de Elementos Finitos (FEM) [2]. Este método consiste en realizar una partición del dominio en elementos de dimensión finita (triángulos, tetraedros, etc) y se buscan soluciones mediante familias de funciones dependientes de un número también finito de parámetro, de manera que el problema inicial se convierte en un sistema de ecuaciones que podemos resolver numéricamente.

Las ventajas de utilizar FEM [3], respecto a otros métodos numéricos, y en concreto, al de diferencias finitas son que se pueden tratar geometrías complejas de forma sencilla, las condiciones de contorno se tratan de manera fácil y se pueden tratar las no linealidades de una forma sencilla. Además, este método está basado en un desarrollo matemático robusto.

El tipo de elementos utilizados para la resolución de FEM se pueden dividir en dos, nodal y vectorial (Figura 2.5).

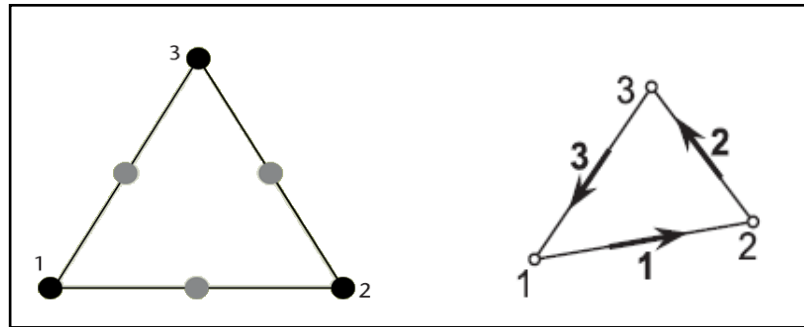


Figura 2.5: Elemento nodal y vectorial [5]

Los elementos nodales utilizan una aproximación escalar. Esta aproximación escalar hace que los elementos nodales sean los más adecuados para modelar componentes individuales de un campo vectorial (Por ejemplo componentes longitudinales H_z o E_z) en modos TE o TM.

Los elementos vectoriales hacen uso de funciones en base vectorial que son más apropiadas para cálculo de aproximaciones a un campo vectorial. Además, permiten la aplicación de las condiciones de contorno de una manera directa.

En este proyecto se emplearan los elementos nodales a la hora de subdividir el componente en guía de onda ya que permitirá un análisis más preciso de los elementos que vamos a utilizar. Además, la implementación es más sencilla al realizarse mediante cálculos escalares [2]. En este trabajo los elementos nodales que se emplearán serán los de segundo orden (Figura 2.5 izq.).

El método de elementos finitos consiste en cinco pasos [2] [3]:

- **Preprocesado:** Este paso consiste en dividir la región de aplicación en elementos finitos.
- **Construcción de matrices:** Este paso consiste en determinar el valor que tomaría la ecuación en derivadas parciales dentro de cada elemento finito del paso anterior.
- **Montaje de la matriz global:** Este paso consiste en la adición de cada elemento finito en la región total.
- **Resolución del sistema de ecuaciones:** Este paso consiste en la resolución del sistema de ecuaciones resultante.
- **Posprocesado:** Este paso consiste en obtener la información que queremos a partir del resultado del sistema de ecuaciones.

2.5.1 Preprocesado

Esta fase de preprocesado consiste en la subdivisión de la región bajo estudio en un conjunto de elementos no solapados, normalmente triángulos o rectángulos. Normalmente a la hora de analizar figuras geométricas en 2D se emplean los triángulos ya que son la forma que mejor se adecua a su estudio. Esta región subdividida en elementos se conoce como “mesh” o malla (Figura 2.6).

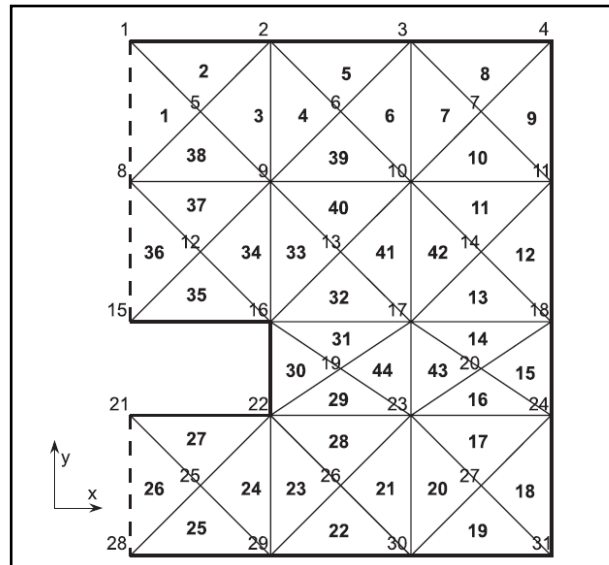


Figura 2.6: Mesh [1]

2.5.2 Construcción de matrices

En cada elemento (Figura 2.6) se aproxima la función solución de la ecuación en derivadas parciales a aplicar en cada elemento mediante una expresión polinómica. Esta función solución aproximada se representa para un sistema cartesiano de coordenadas local a cada elemento.

En el caso de este trabajo se aproximará la solución a la ecuación de Helmholtz para cada elemento finito.

2.5.3 Montaje de la matriz global

Este proceso consiste en sumar la contribución de cada elemento subdividido en el paso anterior (Figura 2.6) para obtener el valor aproximado del elemento completo en un grado de libertad del sistema completo. Para ello se necesita una técnica de ensamblaje apropiada, que sea capaz de tener en cuenta el hecho de que cada uno de los elementos adyacentes comparte grado de libertad. Para ilustrarlo supongamos un caso simple como el que se muestra en la figura 2.7:

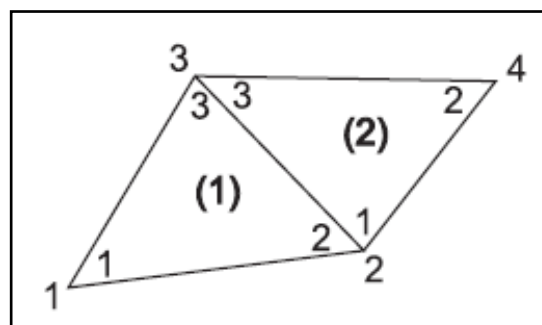


Figura 2.7: Ensamblaje [3]

El valor de la función solución del elemento es añadido a la función global, donde se asocian los esquemas de la numeración global con la numeración de los nodos locales.

2.5.4 Resolución del sistema de ecuaciones

Este proceso consiste en la obtención total de los resultados del sistema de ecuaciones planteados por la matriz global. Para la resolución del sistema de ecuaciones se aplican las condiciones de contorno.

Esta resolución será una aproximación muy precisa del resultado de la ecuación en derivadas parciales planteada en primera instancia.

2.5.5 Posprocesado

Esta fase de posprocesado depende en gran medida del problema a resolver y la información que se quiera obtener de este problema, y consiste en obtener y representar los resultados obtenidos de la aproximación gracias a FEM.

En este trabajo nos centraremos en el análisis de la matriz de dispersión de los dispositivos en guía de onda. Por lo tanto esta etapa de posprocesado consistirá en la presentación gráfica o en forma de tabla de los componentes de la matriz S .

2.5.6 FEniCS

FEniCS es una herramienta que tiene como objetivo automatizar la solución de modelos matemáticos basados en ecuaciones en derivadas parciales. FEniCS [3] permite programar tanto en C++ como en Python. Python, a pesar de ser un lenguaje interpretado, está optimizado para el rendimiento en las operaciones con matrices y resolución de los mismos. Además, debido a la sencillez del lenguaje se optará por utilizar Python como lenguaje de programación de FEniCS.

FEniCS tiene aspectos positivos a la hora de tratar problemas con campos electromagnéticos como la facilidad de división de la región bajo estudio, o la adición posterior del resultado de cada elemento otra vez en la región total [3]. Pero FEniCS también cuenta con algunos inconvenientes a tener en cuenta, el más destacado es que no se pueden utilizar números complejos en esta resolución. Si bien FEniCS tiene más ventajas que inconvenientes a la hora de trabajar con campos electromagnéticos, sus inconvenientes hacen que se necesiten librerías y herramientas adicionales para poder procesar correctamente toda la información resultante de un análisis de un dispositivo en guía de onda [3].

2.6 Discontinuidades

El análisis y la caracterización precisa de las discontinuidades de la guía de onda es un problema importante en la ingeniería de microondas. En algunos casos, las discontinuidades son inevitables resultados de transiciones mecánicas o eléctricas cuyos efectos deben minimizarse. En otros casos se introducen deliberadamente en los dispositivos en guía de onda para cumplir con determinadas características eléctricas.

De manera genérica, las discontinuidades pueden tener una geometría arbitraria y varios materiales en su interior [5]. La región de estudio en este trabajo estará formada por guías de ondas rectangulares.

Una discontinuidad en una guía de onda rectangular es el caso en el que en los extremos (Puertos) se encuentran guías de onda rectangulares, y entre esos dos extremos encontramos tramos de distintas dimensiones y/o formas (Figura 2.8) o incluso con distintos materiales en su interior.

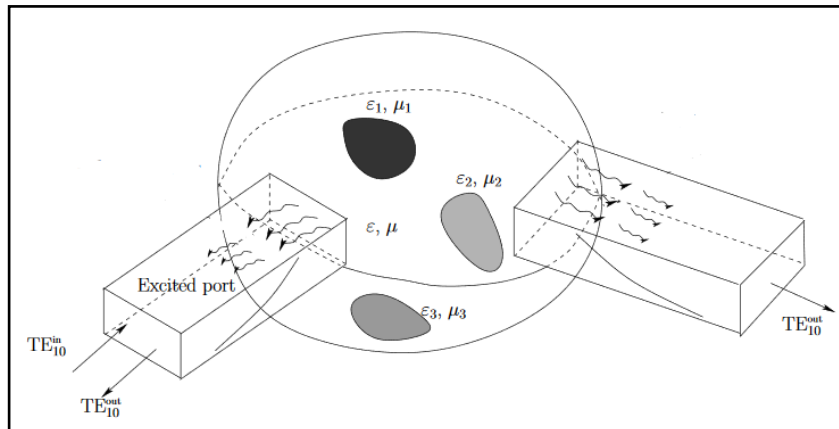


Figura 2.8: Discontinuidad rectangular [1]

Las discontinuidades más comunes son dos, discontinuidades de escalón (step) y discontinuidades de materiales.

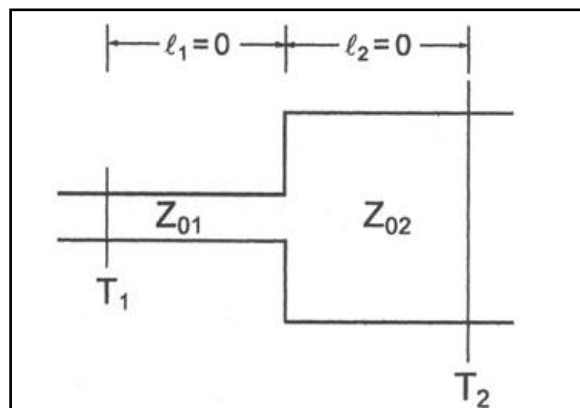


Figure 2.9: Discontinuidad en escalón [5]

Las discontinuidades se pueden dividir en discontinuidades plano H y plano E. En ambos casos, la formulación está basada en descomponer el campo eléctrico y magnético en sus componentes longitudinales y ortogonales.

La formulación de estos dos tipos de discontinuidades se verán en más detalle en las siguientes secciones de este trabajo.

3 Introducción al FEM

En esta sección se va a presentar una primera aproximación al método de elementos finitos en guías de ondas rectangulares.

Las primeras aplicaciones del método de elementos finitos a problemas de propagación de ondas electromagnéticas se realizará a través de una guía de onda metálica hueca homogénea con una sección transversal rectangular.

La guía de onda rectangular hueca se encuentra cerrada con una pared de conductor perfecto (Figura 3.1), donde el plano que se analizará será el (x, y) y la guía se extiende a lo largo del eje z.

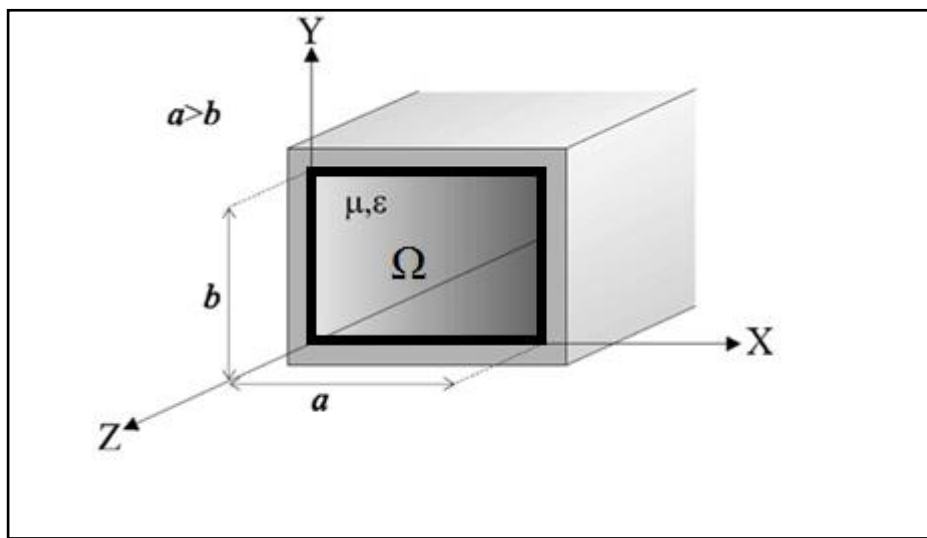


Figura 3.1: Guía de onda conductora de sección rectangular [5]

A modo de primera aproximación al trabajo con el método de elementos finitos, en este apartado se determinará el valor del número de onda al cuadrado en una guía de onda rectangular definida anteriormente.

La ecuación de Helmholtz (2.23) vista en el estado del arte es un problema de autovalores a partir del cual se obtendrá el número de onda al cuadrado y que servirá en este TFM como una primera aproximación y ejemplificar de manera sencilla como se trabaja con el método de elementos finitos.

Para emplear el método de elementos finitos sobre esta ecuación (2.23) previamente se desarrollará matemáticamente, siguiendo los pasos del FEM mencionados anteriormente [3].

3.1 Formulación

Para una guía de onda cerrada homogénea con sección transversal rectangular uniforme a lo largo de la dirección z (Figura 3.1), la función de la componente longitudinal del campo E o el campo H a resolver es:

$$\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0 \quad (3.1)$$

Definido en la región Ω que representa la sección transversal de la guía de onda. Esta componente longitudinal del campo E o el campo H debe cumplir las siguientes condiciones:

- Para los modos TM, donde $\Phi(x, y) = e_z(x, y)$:
 - Condición de frontera de Dirichlet en las paredes metálicas, $\Phi = 0$.
 - Condición de frontera de Neumann en las paredes magnéticas, $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$.
- Para los modos TE, donde $\Phi(x, y) = h_z(x, y)$:
 - Condición de frontera de Dirichlet en las paredes magnéticas, $\Phi = 0$.
 - Condición de frontera de Neumann en las paredes metálicas, $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$.

Donde n es el vector normal a la frontera que divide los dos medios.

El desarrollo que se mostrará a continuación se aplicará para los modos TM, aunque sería similar para los modos TE.

La fórmula de la que se partirá será [1]:

$$\nabla_t^2 e_z(x, y) + k_t^2 e_z(x, y) = 0 \quad (3.2)$$

Que como se ha visto anteriormente en el estado del arte es la ecuación de Helmholtz en formulación escalar (2.23).

Para poder aplicar el método de elementos finitos se necesita transformar la ecuación (3.2) que es un problema con operadores continuos en un problema discreto. Para llevar a cabo la discretización se empleará el método de Galerkin, cuyo objetivo es obtener la ecuación de Helmholtz en formulación débil.

Aplicando sobre la ecuación (3.2) las condiciones de contorno para el modo TM expresadas anteriormente y adicionalmente multiplicando por una función de test W e integrando sobre el dominio Ω bajo estudio se obtiene:

$$\iint_{\Omega} W [\nabla_t^2 e_z + k_t^2 e_z] d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

A continuación se aplicará el teorema de Green sobre (3.3). El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. El resultado que se obtiene tras este teorema da como resultado [1]:

$$\iint_{\Omega} \nabla_t W \cdot \nabla_t e_z d\Omega - \iint_{\Omega} k_t^2 W e_z d\Omega - \int_{\Gamma} W (\nabla_t e_z \cdot \hat{n}) d\Gamma = 0 \quad (3.4)$$

Aplicando las condiciones de contorno se cumple que $W=0$ en Γ pudiendo eliminarse el último término de la ecuación, pasando de la ecuación (3.4) a:

$$\iint_{\Omega} \nabla_t W \cdot \nabla_t e_z d\Omega - k_t^2 \iint_{\Omega} W e_z d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) se conoce como la forma débil de la ecuación de Helmholtz.

Para poder aplicar el método de elementos finitos a este problema debemos poder aplicar la forma débil de la ecuación de Helmholtz a cada subsección del espacio total Ω . Estas subsecciones (Figura 2.5) en los que se dividirá el área total nos referiremos a ellas como (e).

Para calcular e_z en cada elemento (e) se puede aproximar según:

$$e_z^{(e)} = \sum_{j=1}^{N^{(e)}} e_{zj}^{(e)} \alpha_j^{(e)} \quad (3.6)$$

Donde $\alpha_j^{(e)}$ es una función de test de la misma forma que la que se utilizó previamente en la ecuación (3.3) con W [1]. Por lo tanto se puede expresar W como $\alpha_j^{(e)}$.

Aplicando lo visto en la ecuación (3.6) en la ecuación (3.5) podemos expresar la ecuación de Helmholtz en forma débil:

$$\sum_{j=1}^{N^{(e)}} e_{zj}^{(e)} \iint_{\Delta^{(e)}} \nabla_t \alpha_i^{(e)} \cdot \nabla_t \alpha_j^{(e)} d\Omega - k_t^2 \sum_{j=1}^{N^{(e)}} e_{zj}^{(e)} \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \alpha_j^{(e)} d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

De manera matricial (3.7) se puede expresar como:

$$[S] \cdot [e_z] - k_t^2 [T] \cdot [e_z] = 0 \quad (3.8)$$

Donde la matriz $[S]$ y $[T]$ son las matrices generales resultado de ensamblar submatrices $[S^{(e)}]$ y $[T^{(e)}]$ de cada elemento según la numeración total. Los valores que forman estas submatrices son:

$$S_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta_e} \nabla_t \alpha_i^{(e)} \cdot \nabla_t \alpha_j^{(e)} d\Omega \quad (3.9)$$

$$T_{ij}^{(e)} = \iint_{\Delta_e} \alpha_i^{(e)} \alpha_j^{(e)} d\Omega \quad (3.10)$$

Este desarrollo corresponde con la formulación para los modos TM. Si el desarrollo anterior se aplica sobre los modos TE, teniendo en cuenta las condiciones de frontera a aplicar se obtiene [1]:

$$[S] \cdot [h_z] - k_t^2 [T] \cdot [h_z] = 0 \quad (3.11)$$

Donde las matrices $[S]$ y $[T]$ al igual que en los modos TM está formados mediante el ensamblado de submatrices $[S^{(e)}]$ y $[T^{(e)}]$ con las entradas iguales (3.9) y (3.10).

Un concepto importante a definir a la vista de las ecuaciones (3.8) y (3.11) es el de autovalor. En nuestro caso concreto se trata de un problema de autovalores generalizado que se define como $Kv = \lambda Mv$. En el problema que afecta a este trabajo las matrices K y M cumplen $K, M \in \mathbb{R}^n$. Dado que las matrices son reales definidas positivas, se puede demostrar que los autovalores serán reales $\lambda \in \mathbb{R}$. Para el problema que estamos sobre el que estamos trabajando los autovalores λ serán k_t^2 , y las matrices K y M serán las matrices S y T .

3.2 Implementación

Como introducción al método de elementos finitos se calculará el número de onda al cuadrado para varias guías de onda rectangulares. Se implementaran distintos ejemplos donde las dimensiones “a” y “b” de la sección transversal serán distintas. En todos los casos, las paredes metálicas de la guía de onda rectangular serán de conductor perfecto (PEC) y estarán huecas.

Para los distintos ejemplos de guía rectangular que se implementarán, se calcularán los valores del número de onda al cuadrado para todos los modos de la guía de onda, tanto para los modos TM como para los modos TE.

Para la obtención del número de onda al cuadrado mediante el método de elementos finitos tanto para los modos TM como para los modos TE se empleará la fórmula (3.8) para los modos TM y la fórmula (3.11) para los modos TE. Sin embargo, estas fórmulas sólo pueden emplearse en cada elemento del área total de la sección transversal de la guía. Por lo tanto, previamente a la aplicación de las fórmulas se dividirá el área total Ω . Sobre cada elemento resultado de la división se empleará la formulación desarrollada en el apartado anterior y posteriormente se ensamblarán los resultados parciales de cada elemento según la ponderación de cada elemento en el área total para obtener finalmente el número de onda al cuadrado para el área total de la guía de onda.

Las dimensiones de las guías de onda que se estudiarán se encuentran en la siguiente tabla:

	a	b	Dimensión
Modelo 1	1.0	0.5	mm
Modelo 2	10.0	7.0	mm
Modelo 3	20.0	12.0	mm

Tabla 3.1: Dimensiones sección transversal línea rectangular

3.3 Resultados

Como se ha expuesto en el apartado anterior, previamente a poder aplicar las ecuaciones (3.8) y (3.11) al área completa Ω (Figura 3.1), ésta se debe dividir en áreas ponderadas que permitan posteriormente poder ensamblarlas de manera adecuada para obtener el valor total del número de onda al cuadrado. Los resultados de esta división se muestran en las siguientes figuras. En estas figuras se muestra la sección transversal de la guía de onda rectangular de los tres modelos bajo estudio donde se puede ver el resultado del mallado:

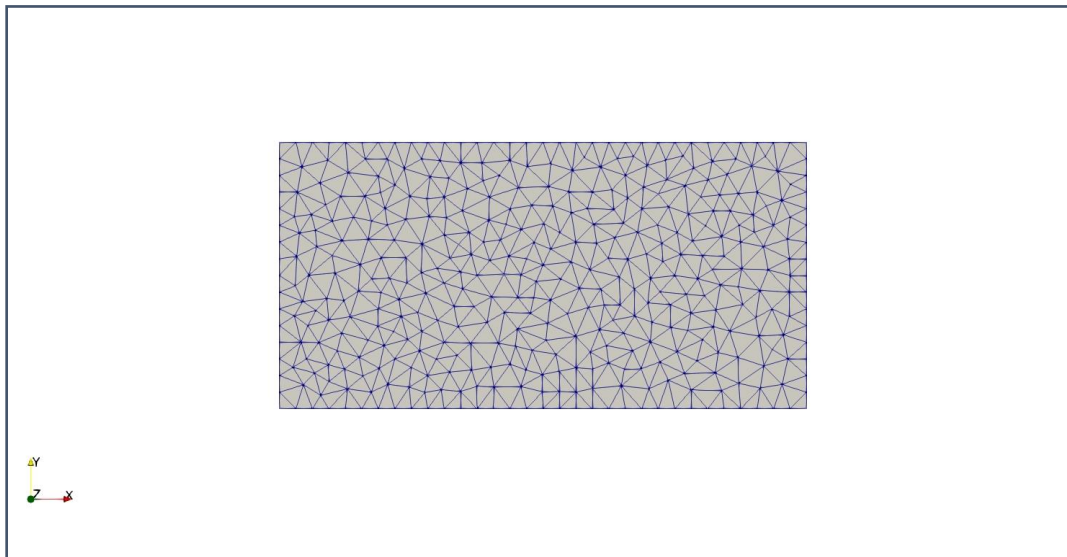


Figura 3.2: Sección transversal modelo 1. N° Elementos: 702. Grados de Libertad: 1822

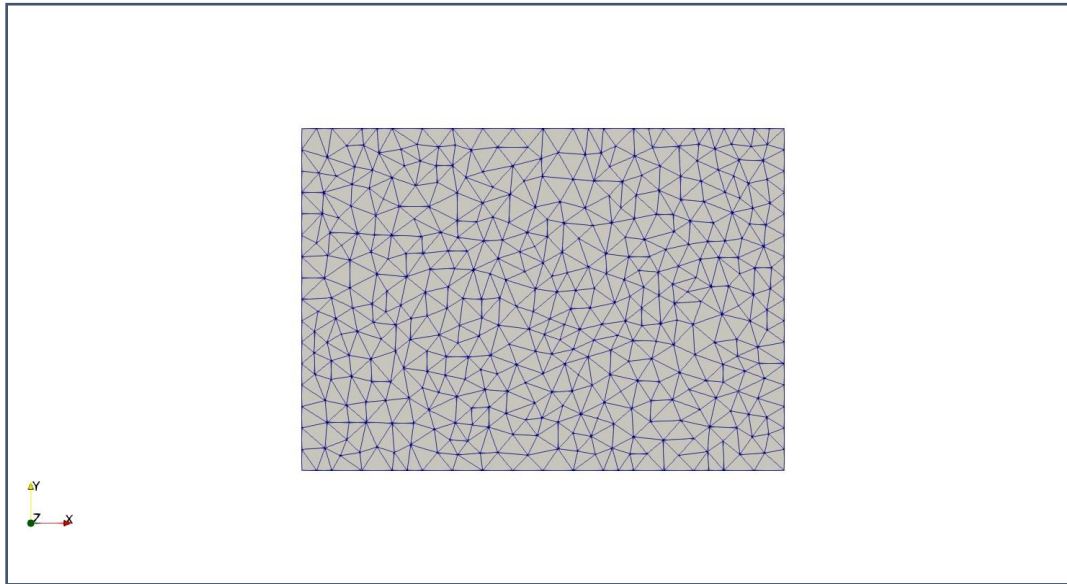


Figura 3.3: Sección transversal modelo 2. N° Elementos: 702. Grados de Libertad: 1822

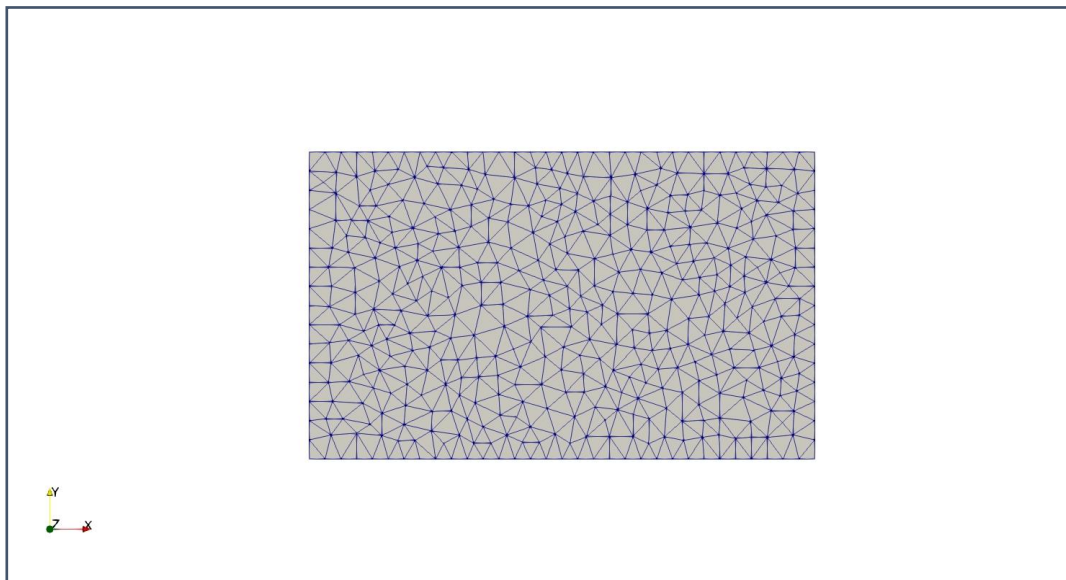


Figura 3.4: Sección transversal modelo 3. N° Elementos: 702. Grados de Libertad: 1822

Posteriormente se realiza el ensamblado y resolución del sistema total.

Para la comprobación de los resultados utilizamos la ecuación (2.32). Dado que los resultados obtenidos es el número de onda al cuadrado (2.32) pasa a [6]:

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3.12)$$

Esta ecuación (3.12) se aplica tanto para calcular el número de onda al cuadrado de los modos TE_{mn} como los modos TM_{mn} .

La ecuación (3.12) cuenta con dos excepciones. Cuando se aplica sobre modos TM_{mn} ni “m” ni “n” pueden ser cero. Esto se debe a que si “m” o “n” son cero el valor del campo es cero, por lo tanto “m” y “n” deben ser igual a un número entero mayor a cero. Por otro lado, cuando se aplica sobre TE_{mn} ni “m” ni “n” pueden ser cero al mismo tiempo, ya que de ser así el campo sería uniforme sobre cualquier sección transversal de la guía.

Aplicando (3.12) y teniendo en cuenta las dos características sobre la aplicación en los modos TE_{mn} y TM_{mn} se comprobará el valor teórico con el obtenido mediante el método de elementos finitos:

	Valor teórico de k_t^2 [6]	Valor de k_t^2 mediante FEM
Modelo 1: TE 10	9.87	9.88
Modelo 1: TM 21	78.95	79.77
Modelo 2: TE 11	0.30	0.30
Modelo 2: TM 41	1.78	1.82
Modelo 3: TE 31	0.29	0.29
Modelo 3: TM 41	0.46	0.47

Tabla 3.2: Valores teóricos frente a FEM

Como se puede apreciar en la tabla anterior, la aproximación realizada por el método de elementos finitos si bien no es perfecta la desviación es mínima entre el valor teórico y el valor obtenido tras su aplicación.

Tras la comprobación teórica de los valores de k_t^2 para algunos de los modos de las guías implementadas se presentará un análisis de los resultados para más modos.

Mediante la resolución con FEniCS se obtienen los resultados del número de onda al cuadrado para los cuatrocientos primeros modos TM y los cuatrocientos modos TE, como representación de esos resultados se van a escoger diez valores tanto para TE como TM. Los resultados obtenidos que se presentan a continuación se han dividido en dos tablas una para los modos TM y otra para los modos TE, para cada modelo.

Modos	Valor de k_t^2
TE10	9.88
TE 01	39.67
TE 20	39.67
TE 11	49.64
TE 21	79.71
TE 30	89.79
TE 31	130.37
TE 40	160.99
TE 02	161.08
TE 12	171.33

Tabla 3.3: Número de onda al cuadrado modelo 1 modos TE

Modos	Valor de k_t^2
TM 11	49.65
TM 21	79.76
TM 31	130.50
TM 12	171.29
TM 41	202.31
TM 22	202.53
TM 32	254.61
TM 51	297.25
TM 42	328.8

Tabla 3.4: Número de onda al cuadrado modelo 1 modos TM

Modos	Valor de k_t^2
TE10	0.10
TE 01	0.20
TE 11	0.30
TE 20	0.39
TE 21	0.60
TE 02	0.81
TE 30	0.90
TE 12	0.91
TE 31	1.10
TE 22	1.22

Tabla 3.5: Número de onda al cuadrado modelo 2 modos TE

Modos	Valor de k_t^2
TM 11	0.30
TM 21	0.60
TM 12	0.91
TM 31	1.10
TM 22	1.22
TM 32	1.73
TM 41	1.82
TM 13	1.97
TM 23	2.28

Tabla 3.6: Número de onda al cuadrado modelo 2 modos TM

Modos	Valor de k_t^2
TE10	0.02
TE 01	0.06
TE 11	0.09
TE 20	0.09
TE 21	0.16
TE 30	0.22
TE 02	0.27
TE 31	0.29
TE 12	0.30
TE 22	0.38

Tabla 3.7: Número de onda al cuadrado modelo 3 modos TE

Modos	Valor de k_t^2
TM 11	0.09
TM 21	0.16
TM 31	0.29
TM 12	0.30
TM 22	0.38
TM 41	0.47
TM 32	0.51
TM 42	0.66
TM 51	0.69

Tabla 3.8: Número de onda al cuadrado modelo 3 modos TM

Los resultados obtenidos son la aproximación resultante de la implementación del método de elementos finitos sobre un problema de autovalores en la guía rectangular.

Gracias a los tres modelos implementados donde se ha ido variando la relación a/b se puede apreciar como el número de onda de corte varía dependiendo de esta relación. Además, se puede comprobar que para todas las guías con sección transversal rectangular su modo fundamental siempre es el TE_{10} .

Tras la realización y la comprobación de este ejemplo introductorio al método de elementos finitos podemos concluir que el error cometido en la aproximación que implica la implementación del método de elementos finitos es mínimo, por lo tanto en las siguientes implementaciones que se llevarán a cabo en este TFM podremos asegurar que los resultados obtenidos tras la resolución del método de elementos finitos es fiable.

4 Plano H

Las uniones de guía de ondas rectangulares con sección transversal uniforme al plano que contiene el campo magnético son generalmente denominadas como uniones plano H. Suponiendo que a través de uno o más puertos el dispositivo se excita con el modo TE_{10} (modo fundamental en las guías de onda rectangulares como se ha visto en el apartado 3) y sea una guía homogénea, el componente de campo necesarios para un análisis correcto de la unión plano H es E_y .

En este apartado se presentará un análisis de estos componentes, empezando por el desarrollo de la formulación necesaria para aplicar el método de elementos finitos en estos dispositivos. Posteriormente, se comprobará la formulación desarrollada mediante un ejemplo sencillo de una guía de onda rectangular que termine en un plano de conductor perfecto. Y finalmente con el programa desarrollado en Python con esta formulación se analizarán diferentes dispositivos.

El análisis de las uniones plano H se realizará mediante la obtención de las matrices de dispersión. Por lo tanto, la formulación y el programa que se implementará a partir de esta se enfoca en obtener la matriz de dispersión de cualquier dispositivo plano H, siempre y cuando una o más puertos del mismo se encuentren excitadas con el modo fundamental TE_{10} .

4.1 Formulación

Consideremos un dispositivo plano H genérico como se ve en la siguiente figura:

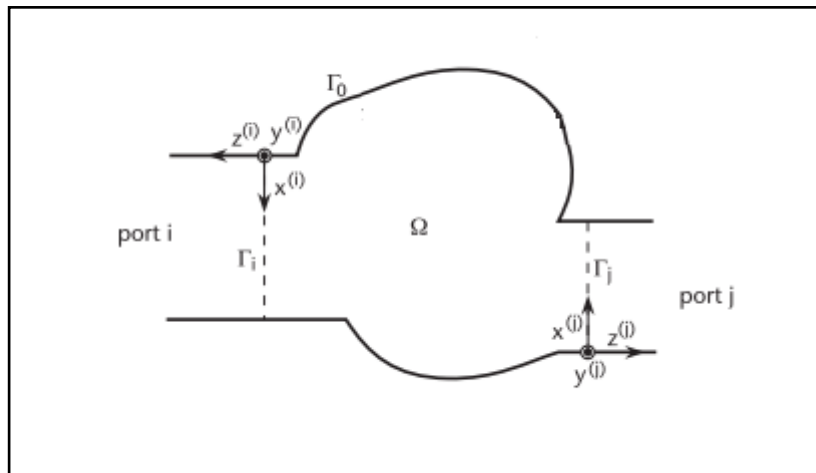


Figura 4.1: Plano H genérico [1]

Donde se sabe que el dispositivo tiene dos puertos situados a lo largo del eje z y una forma arbitraria entre los puertos. Este dispositivo genérico se encuentra formado por guías de onda de sección transversal rectangular y se encuentra excitado en una o ambas puertas por el modo fundamental TE_{10} .

En general [1], la componente del campo tangencial al puerto k cuando el puerto j se encuentra excitado con el modo TE₁₀ se expresa como:

$$E_{y_{wg}}^{(k)} = \delta_{kj} e_1^{(j)}(x^{(j)}) e^{j\beta_1^{(j)} z^{(j)}} + B^{(k)} e_1^{(k)}(x^{(k)}) e^{-j\beta_1^{(k)} z^{(k)}} \quad (4.1)$$

$$j\omega\mu_0 H_{x_{wg}}^{(k)}(x^{(k)}) = \frac{\partial E_{y_{wg}}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \quad (4.2)$$

Donde $e_1^{(k)}$ es la función ortonormal del modo TE₁₀ en la guía k:

$$e_1^{(k)}(x^{(k)}) = \frac{2}{\sqrt{a^{(k)}b}} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}} \sin\left(\frac{\pi}{a^{(k)}} x^{(k)}\right) \quad (4.3)$$

Donde k_0 es la constante de propagación en el vacío y Z_0 es la impedancia característica. $\beta_1^{(k)}$ es la constante de propagación en la guía de onda con dimensiones a^k y b :

$$\begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_{t1}^{(k)^2}} & \text{para } k_0^2 \geq k_{t1}^{(k)^2} \\ -j\sqrt{k_{t1}^{(k)^2} - k_0^2} & \text{para } k_{t1}^{(k)^2} > k_0^2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Donde $k_{t1}^{(k)} = \pi/a^{(k)}$ es la constante de propagación de corte del modo TE₁₀ en el puerto k.

Al igual que en el apartado anterior, la formulación parte de la ecuación de Helmholtz en forma escalar (2.23):

$$\nabla_t \cdot \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t E_y \right) + k_0^2 \epsilon_r E_y = 0 \quad (4.5)$$

Para el desarrollo de esta ecuación se deben aplicar las condiciones de continuidad para cada campo en los puertos y las condiciones de contorno de Dirichlet en las paredes metálicas:

$$E_{y|_{\Gamma_k}} = E_{y_{wg}}^{(k)} \quad k = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

$$H_{x|_{\Gamma_k}} = H_{x_{wg}}^{(k)} \quad k = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

Adicionalmente, como resultado de las condiciones de contorno homogéneas de Dirichlet en las paredes metálicas se cumple que:

$$E_y = 0 \quad (4.8)$$

Donde la ecuación (4.6) se puede expresar en funciones de derivadas como:

$$\frac{\partial E_y}{\partial n|_{\Gamma_k}} = \frac{\partial E_{y_{wg}}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \quad k = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

Multiplicando una función de test W a (4.5):

$$\iint_{\Omega} W \nabla_t \cdot \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t E_y \right) d\Omega + \iint_{\Omega} k_0^2 \varepsilon_r W E_y d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

Aplicando este mismo proceso, las ecuaciones (4.6) y (4.8) se pueden expresar como:

$$\int_{\Gamma_k} W E_y d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} W E_{ywg}^{(k)} d\Gamma_k \quad k = 1, \dots, N \quad (4.10)$$

$$\int_{\Gamma_k} W \frac{\partial E_y}{\partial n} d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} W \frac{\partial E_{ywg}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} d\Gamma_k \quad k = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

Aplicando la identidad de Green a la ecuación (4.9) e introduciendo la condición de contorno (4.11) se obtiene la ecuación de Helmholtz en su forma débil:

$$\iint_{\Omega} \nabla_t W \cdot \frac{1}{\mu_r} \nabla_t E_y d\Omega - k_0^2 \iint_{\Omega} \varepsilon_r W E_y d\Omega - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} W \frac{\partial E_{ywg}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} d\Gamma_k = 0 \quad (4.12)$$

Una vez presentada la formulación básica de los dispositivos plano H, es necesario tratar las formulas (4.10) y (4.12) para poder solucionar el sistema de ecuaciones mediante el método de elementos finitos. Para ello se deben emplear los cinco pasos vistos en la sección 2.5 del estado del arte [1].

El primer paso para la resolución de las ecuación (4.12) a través del método de elementos finitos es dividir el área total bajo estudio Ω . Para cada elemento (e) resultado de esta división se debe aplicar la una aproximación de la ecuación (4.12).

La función de aproximación $\bar{E}_y^{(e)}$ tiene la forma:

$$\bar{E}_y^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^{N^{(e)}} \bar{E}_{yj}^{(e)} \alpha_j^{(e)}(x, y) \quad (4.13)$$

Donde $\alpha_j^{(e)}$ es una función de test, que coincide en forma con la aproximación de W en cada elemento (e) siendo $W_i^{(e)} = \alpha_i^{(e)}$ ($i = 1, \dots, N^{(e)}$). Por lo tanto la ecuación (4.12) se puede particularizar para cada elemento (e) quedando como:

$$\frac{1}{\mu_r} \iint_{\Delta^{(e)}} \nabla_t \alpha_i^{(e)} \cdot \nabla_t \bar{E}_y^{(e)} d\Omega - k_0^2 \varepsilon_r \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \bar{E}_y^{(e)} d\Omega - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \frac{\partial \bar{E}_{ywg}^{(e)}}{\partial z^{(k)}} d\Gamma_k = 0 \quad (4.14)$$

O expresada en forma matricial:

$$\frac{1}{\mu_r} [S^{(e)}] \cdot [\bar{E}_y^{(e)}] - k_0^2 \varepsilon_r [T^{(e)}] \cdot [\bar{E}_y^{(e)}] + \sum_{k=1}^N \{ [C_k^{(e)}] \cdot [B_k] - [H_k^{(e)}] \} = 0 \quad (4.15)$$

La ecuación (4.15) se puede ensamblar en un único sistema lineal. Para ello, las matrices $[S^{(e)}]$ y $[T^{(e)}]$ junto con sus coeficientes se pueden expresar como:

$$[F^{(e)}] = \frac{1}{\mu_r} \iint_{\Delta^{(e)}} \nabla_t \alpha_i^{(e)} \cdot \nabla_t \bar{E}_y^{(e)} d\Omega - k_0^2 \varepsilon_r \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \bar{E}_y^{(e)} d\Omega \quad (4.16)$$

De la ecuación (4.15) la matriz $[B_k]$ es la matriz de parámetros de dispersión del dispositivo que se quiere obtener [1]. La matriz $[C_k^{(e)}]$, tiene como entradas a la matriz:

$$C_{ki1}^{(e)} = j\beta_1^{(k)} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} e_1^{(k)} d\Gamma_k^{(e)} \quad (4.17)$$

Donde sustituyendo $e_1^{(k)}$ por la ecuación (4.3):

$$C_{ki1}^{(e)} = j\beta_1^{(k)} \frac{2}{\sqrt{a^{(k)}b}} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \sin\left(\frac{\pi}{a^{(k)}} x^{(k)}\right) d\Gamma_k^{(e)} \quad (4.18)$$

Donde $\beta_1^{(k)}$ y $a^{(k)}$ depende del puerto (k) del dispositivo bajo estudio.

Por otro lado la matriz $[H_k^{(e)}]$ tiene como entradas:

$$H_{ki1}^{(e)} = j\beta_1^{(l)} \delta_{kl} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} e_1^{(l)} d\Gamma_k^{(e)} \quad (4.19)$$

Donde al igual que en el caso anterior utilizando la ecuación (4.3):

$$H_{ki1}^{(e)} = j\beta_1^{(l)} \delta_{kl} \frac{2}{\sqrt{a^{(l)}b}} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} \sin\left(\frac{\pi}{a^{(l)}} x^{(l)}\right) d\Gamma_k^{(e)} \quad (4.20)$$

En este caso, $\beta_1^{(l)}$ y $a^{(l)}$ hace referencia al puerto que se encuentra alimentado con el modo TE_{10} . La delta de Kronecker, δ_{kl} , se tomara con valor de uno, si $k=1$.

Las ecuaciones (4.16), (4.18) y (4.20) son las ecuaciones que forman las matrices locales de cada elemento (e), teniendo la ponderación de cada elemento (e) se puede ensamblar un solo sistema lineal para el área completa bajo estudio Ω :

$$[F] \cdot [\bar{E}] + [C] \cdot [B] = [H^{inc}] \quad (4.21)$$

La ecuación (4.21) es la primera del sistema a resolver. La segunda ecuación del sistema se obtiene de las condiciones de contorno.

Para obtener la segunda ecuación del sistema a resolver se parte de la ecuación (4.10). Para poder aplicar dicha ecuación al sistema primero se debe seleccionar una función de ponderación W . La opción más adecuada para poder solucionar el problema de elementos finitos en el problema de dispositivos de radiofrecuencia es [1]:

$$W_1^{(k)} = \sin\left(\frac{\pi}{a^{(k)}} x^{(k)}\right) \quad (4.22)$$

Aplicando (4.22) a (4.10):

$$\int_{\Gamma_k} \sin\left(\frac{\pi}{a^{(k)}} x^{(k)}\right) \bar{E}_y d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} \sin\left(\frac{\pi}{a^{(k)}} x^{(k)}\right) \left\{ \delta_{kj} e_1^{(j)}(x^{(j)}) + B_1^{(k)} e_1^{(k)}(x^{(k)}) \right\} d\Gamma_k \quad (4.23)$$

Desarrollando la ecuación (4.23) se obtiene la siguiente integral:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2} \quad (4.24)$$

Introduciendo la solución (4.24) en (4.23):

$$\int_{\Gamma_k} \sin\left(\frac{\pi}{a^{(k)}}x^{(k)}\right) \bar{E}_y - \sqrt{\frac{a^{(k)}}{b}} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}} B_1^{(k)} - \delta_{kl} \sqrt{\frac{a^{(l)}}{b}} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(l)}}} = 0 \quad (4.25)$$

Donde como se ha dicho anteriormente (l) es el puerto alimentado con el modo TE₁₀. La ecuación en referencia al puerto genérico k se puede expresar en forma matricial como:

$$[D_k] \cdot [E_y^{(k)}] + [A_k] \cdot [B_k] - [E_k] = 0 \quad (4.26)$$

La matriz $[E_y^{(k)}]$ está formada por los coeficientes del campo eléctrico asociado al puerto k. Las entradas de la matriz $[D_k]$ son:

$$D_{kj} = \int_{\Gamma_k} \sin\left(\frac{\pi}{a^{(k)}}x^{(k)}\right) \alpha_j^{(k)} d\Gamma_k \quad (4.27)$$

Las entradas de la matriz $[A_k]$:

$$A_k = -\sqrt{\frac{a^{(k)}}{b}} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}} \quad (4.28)$$

Donde M es el número de puertos en el dispositivo de microondas. Por último, $[E_k]$ o $[E^{inc}]$ es la matriz que considera el campo eléctrico incidente en el puerto k [1]. Esta matriz solo cuenta con una entrada no nula, coincidiendo con el modo TE₁₀:

$$E_{k1} = \delta_{kl} \sqrt{\frac{a^{(l)}}{b}} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(l)}}} \quad (4.29)$$

Finalmente con las ecuaciones (4.21) y (4.26) el sistema de ecuaciones a resolver queda:

$$\begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [C] & [F] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B] \\ [E] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [E^{inc}] \\ [H^{inc}] \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Donde la ecuación (4.30) y cada una de las matrices que lo forman se pueden desarrollar y solucionar en FEniCS a través del sistema de elementos finitos.

4.2 Implementación

En este apartado se va a describir como se ha resuelto el sistema (4.30) mediante FEniCS, ya que el programa tiene algunas particularidades que se necesitan aclarar.

El sistema (4.30) puede expresarse como:

$$([A] - [D] \cdot [F^{-1}] \cdot [C]) \cdot [B] = [E^{inc}] - [D] \cdot [F^{-1}] \cdot [H^{inc}] \quad (4.31)$$

Esta ecuación (4.31) es la que se necesita resolver para obtener la matriz de dispersión del dispositivo bajo estudio [B]. La resolución de esta ecuación se ha dividido en dos partes, una primera parte resuelta mediante FEniCS y una segunda parte resuelta mediante numpy.

La primera parte de la implementación es la que tiene toda la carga de resolución mediante FEM. Es la parte más compleja y la que mayor número operaciones requiere, ya que como se ha explicado previamente primero se ha de dividir el área total en elementos menores, aplicar la formulación anterior a cada elemento y posteriormente ensamblarlo para una solución total. La parte a resolver por FEM de la ecuación (4.31) son las multiplicaciones $[F^{-1}] \cdot [C]$ y $[F^{-1}] \cdot [H^{inc}]$, y la obtención de las matrices [A], [D] y $[E^{inc}]$. La utilización de FEniCS como herramienta para la resolución de problemas del método de elementos finitos tiene muchas ventajas como la sencillez en el cálculo y manejo de un gran número de elementos y su posterior ensamblaje, pero tiene un inconveniente ya que no trabaja con números complejos. Por lo tanto las matrices resultantes de la multiplicación de matrices mencionadas anteriormente se han calculado sin la parte compleja de las matrices [C] y $[H^{inc}]$ ($j\beta_1^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}}$) que se añadirán posteriormente. Por tanto las matrices resultantes de estas multiplicaciones de matrices son:

$$[X] = \frac{[F^{-1}] \cdot [C]}{j\beta_1^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}}} \quad (4.32)$$

$$[Y] = \frac{[F^{-1}] \cdot [H^{inc}]}{j\beta_1^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}}} \quad (4.33)$$

En la segunda parte del código, tras añadir las componentes complejas a las matrices [X] e [Y] ($[X^c]$ e $[Y^c]$) se despejará finalmente la matriz [B] de la ecuación (4.31). Esta parte del código se ha llevado a cabo mediante numpy ya que el problema se convierte en un sistema de matrices que se pueden tratar de manera más eficiente. Las matrices complejas quedan como:

$$[X^c] = j\beta_1^{(k)} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}} [X] \quad (4.34)$$

$$[Y^c] = j\beta_1^{(k)} \sqrt{\frac{k_0 Z_0}{\beta_1^{(k)}}} [Y] \quad (4.35)$$

Resolviendo la ecuación (4.31) la obtención de la matriz de dispersión del dispositivo queda como:

$$[B] = ([E^{inc}] - [D] \cdot [Y^c]) \cdot ([A] - [D] \cdot [X^c])^{-1} \quad (4.36)$$

4.3 Comprobación Formulación

Para la comprobación del código implementado en FEniCS descrito en el apartado anterior se implementará un caso sencillo cuya matriz de dispersión sea conocida de manera teórica.

Los casos que se emplearan para la comprobación son dispositivos de guías de onda rectangulares de longitudes λ , $\frac{\lambda}{2}$ y $\frac{\lambda}{4}$, (Figura 4.2) y:

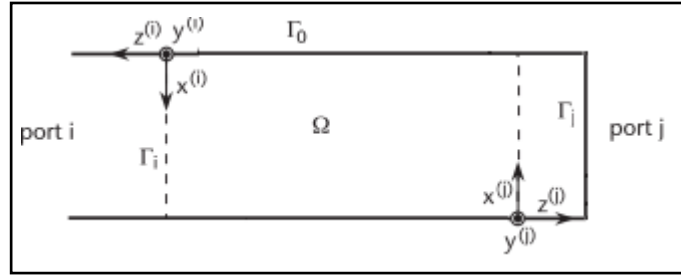


Figura 4.2: Guía plano H comprobación [1]

La figura 4.2 representa de manera genérica la guía de onda bajo estudio donde los distintos casos de comprobación serán iguales excepto la longitud. Como se ve en la figura, la guía de onda se encuentra terminada por un plano metálico de conductor perfecto.

Los parámetros que caracterizan las guías de onda rectangulares que se presentaran a continuación se encuentran en la siguiente tabla:

	Valor	Dimensión
a	0.5	cm
b	1/3	cm
f_{CTE10}	29.98	GHz
f	32.97	GHz

Tabla 4.1: Parámetros guía de onda genérica

4.3.1 Guía λ

El primer ejemplo que se comprobará con el objetivo de saber si se ha implementado correctamente la formulación presentada en el apartado (4.1) será una guía de onda rectangular de longitud λ . La longitud de la guía con los parámetros mostrados en la (Tabla 4.1) da el siguiente valor:

$$l = 2.18 [cm] \quad (4.34)$$

En la siguiente figura se muestra el área geométrica sobre la cual se aplicarán la formulación del plano H vista en el apartado 4.1, además se muestra el resultado de la subdivisión del área total en elementos menores (primera paso para la implementación de FEM en cualquier dispositivo):

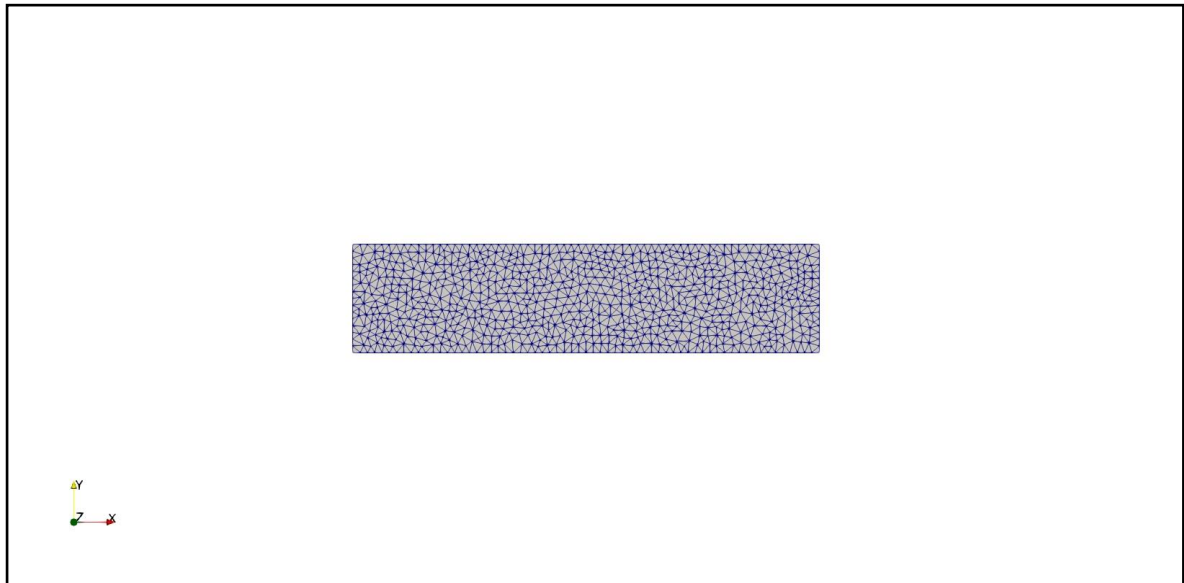


Figura 4.3: Mesh guía rectangular λ plano H. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

Los resultados teóricos y los obtenidos mediante FEM son:

	Valor FEM	Valor teórico [1]	Dimensión
Módulo S_{11}	1	1	Naturales
Fase S_{11}	-179.98	-180	Grados

Tabla 4.2: FEM vs Teórico longitud λ

Al comparar ambos valores podemos ver que en cuanto al módulo el método de elementos finitos hace una gran aproximación dando el valor exacto. Por otro lado, en cuanto a la fase la desviación que presenta el método de elementos finitos es mínimo.

4.3.2 Guía $\lambda/2$

Con los datos que se refleja en la tabla (4.1) se calcula la longitud $\lambda/2$, obteniendo:

$$l = 1.09[cm] \quad (4.35)$$

En cuanto al proceso de subdivisión del área total bajo estudio se muestra en la siguiente figura:

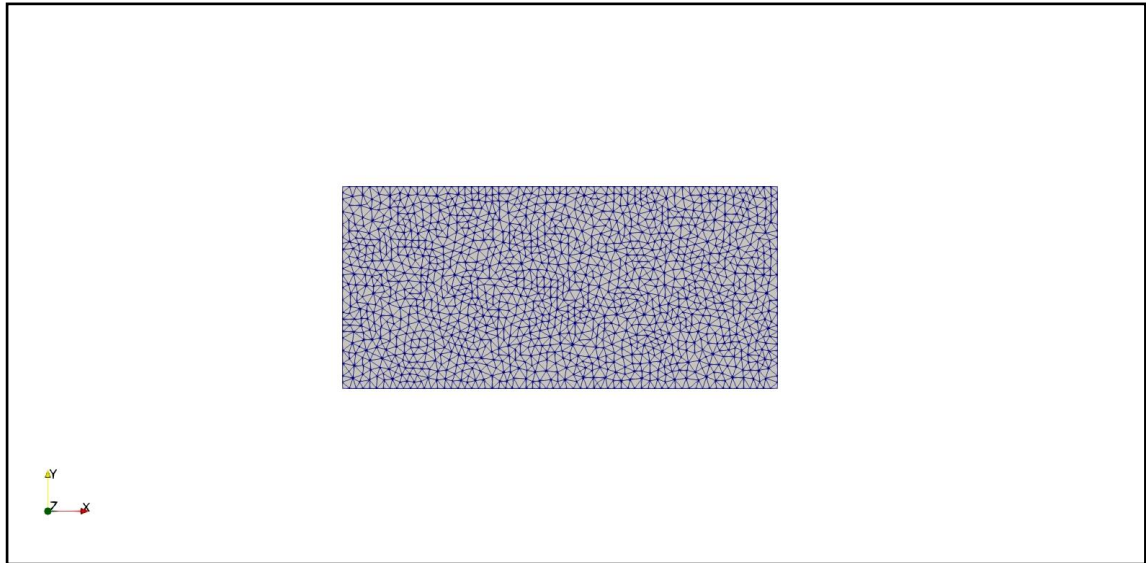


Figura 4.4: Mesh guía rectangular $\lambda/2$ plano H. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

Los valores teóricos y los valores FEM de la matriz de dispersión para un dispositivo en guía de onda rectangular de $\lambda/2$ cerrado en el segundo puerto por una pared de conductor perfecto son:

	Valor FEM	Valor teórico [1]	Dimensión
Módulo S_{11}	1	1	Naturales
Fase S_{11}	-179.99	-180	Grados

Tabla 4.3: FEM vs Teórico longitud $\lambda/2$

Comparando ambos valores se ve que en el módulo se sigue dando una aproximación perfecta al valor teórico ideal, y en fase el error sigue siendo mínimo.

4.3.3 Guía $\lambda/4$

Con los datos que se refleja en la tabla (4.1) se calcula la longitud $\lambda/4$, obteniendo:

$$l = 0.54 \text{ [cm]} \quad (4.36)$$

En cuanto al proceso de subdivisión del área total bajo estudio se muestra en la siguiente figura:

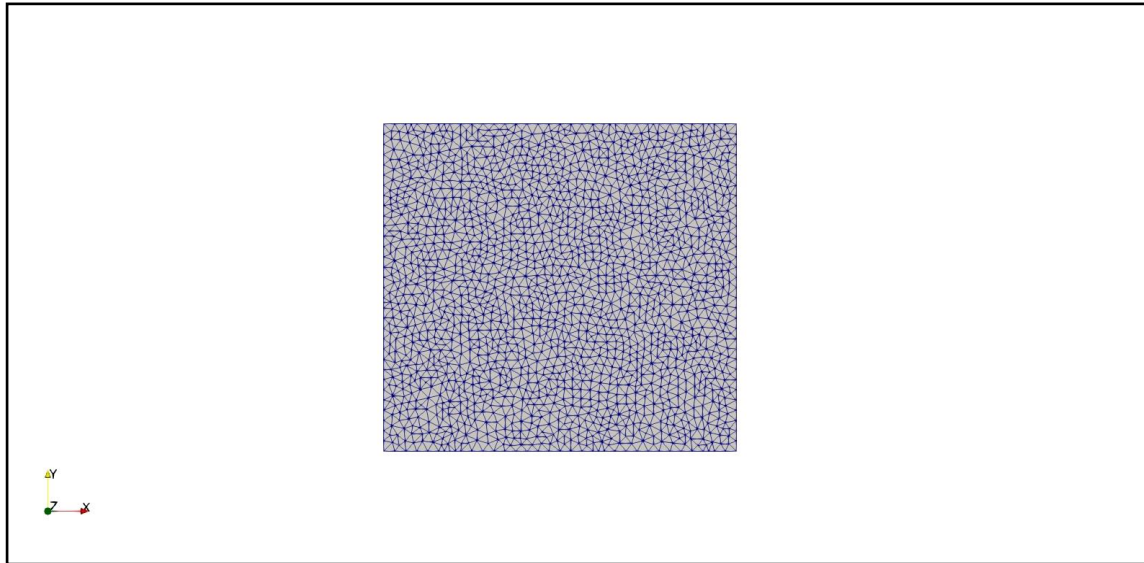


Figura 4.5: Mesh guía rectangular $\lambda/4$ plano H. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

Los valores teóricos y obtenidos mediante FEM de la matriz de dispersión para un dispositivo en guía de onda rectangular de $\lambda/4$ cerrado en el segundo puerto por una pared de conductor perfecto son:

	Valor FEM	Valor teórico [1]	Dimensión
Módulo S_{11}	1	1	Naturales
Fase S_{11}	$4.84 \cdot 10^{-5}$	0	Grados

Tabla 4.4: FEM vs Teórico longitud $\lambda/4$

4.4 Análisis de dispositivos

En este apartado se analizarán distintos dispositivos plano H, representando gráficamente algunos de los componentes de la matriz de dispersión de dichos dispositivos.

4.4.1 Guía de onda rectangular con un iris

El primer caso que se analizará será una guía de onda rectangular con un iris en el centro del dispositivo [1] tal y como se muestra en la siguiente figura:

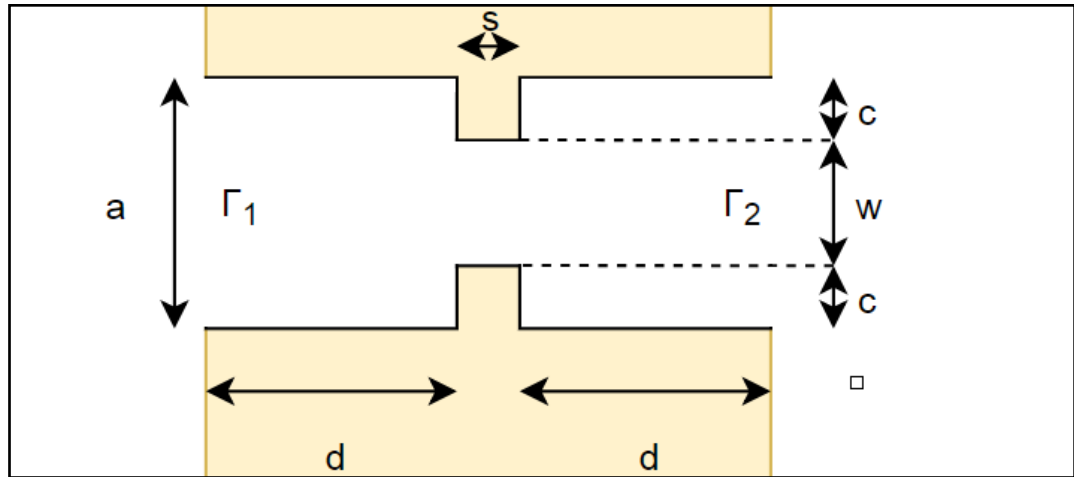


Figura 4.6: Guía de onda rectangular con un iris

Donde las dimensiones que se muestran vienen definidas en la siguiente tabla:

	Valor	Dimensión
a	18.35	mm
b	9.175	mm
w	9.175	mm
s	0.5	mm
c	4.587	mm
d	10	mm

Tabla 4.5: Dimensiones guía de onda rectangular con un iris

Por otro lado, el rango de frecuencias para el cual se simulará este componente será de entre los 10 - 15 GHz.

Para aplicar el método de elementos finitos sobre el dispositivo (Figura 4.6) lo primero que se debe hacer es subdividir el área total bajo estudio en elementos menores. Esta subdivisión queda como:

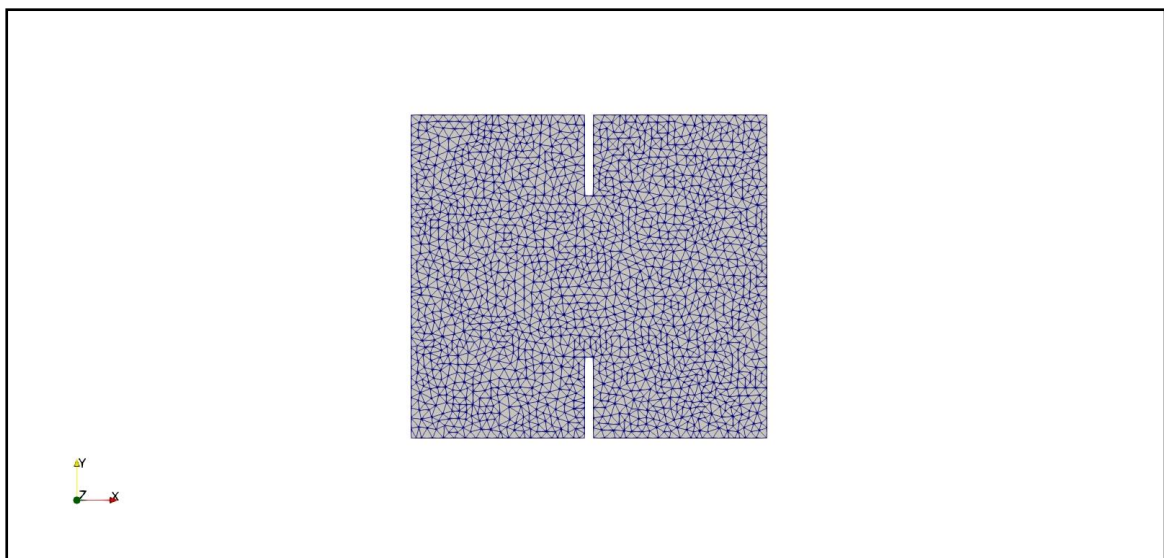


Figura 4.7: Mesh guía de onda rectangular con iris. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

Los resultados obtenidos se mostrarán en dos gráficas, la primera representará el módulo de cada uno de los componentes de la matriz de dispersión en dB y en la segunda se representan las fases de estos componentes en grados:

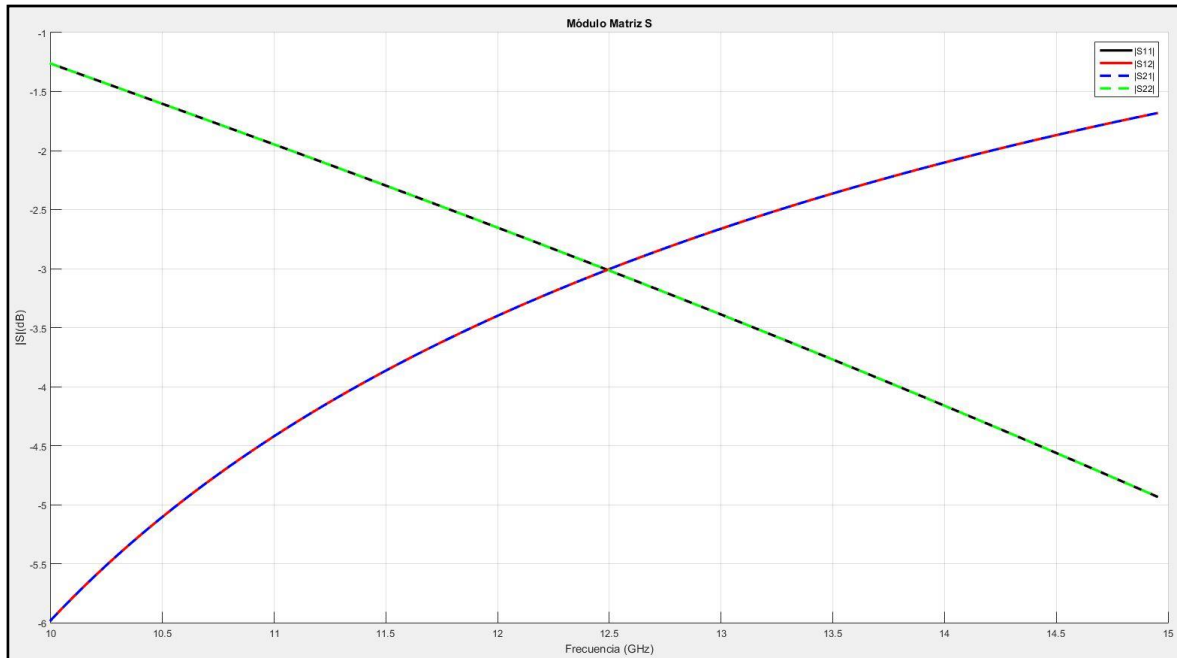


Figura 4.8: Amplitud matriz S guía rectangular con iris

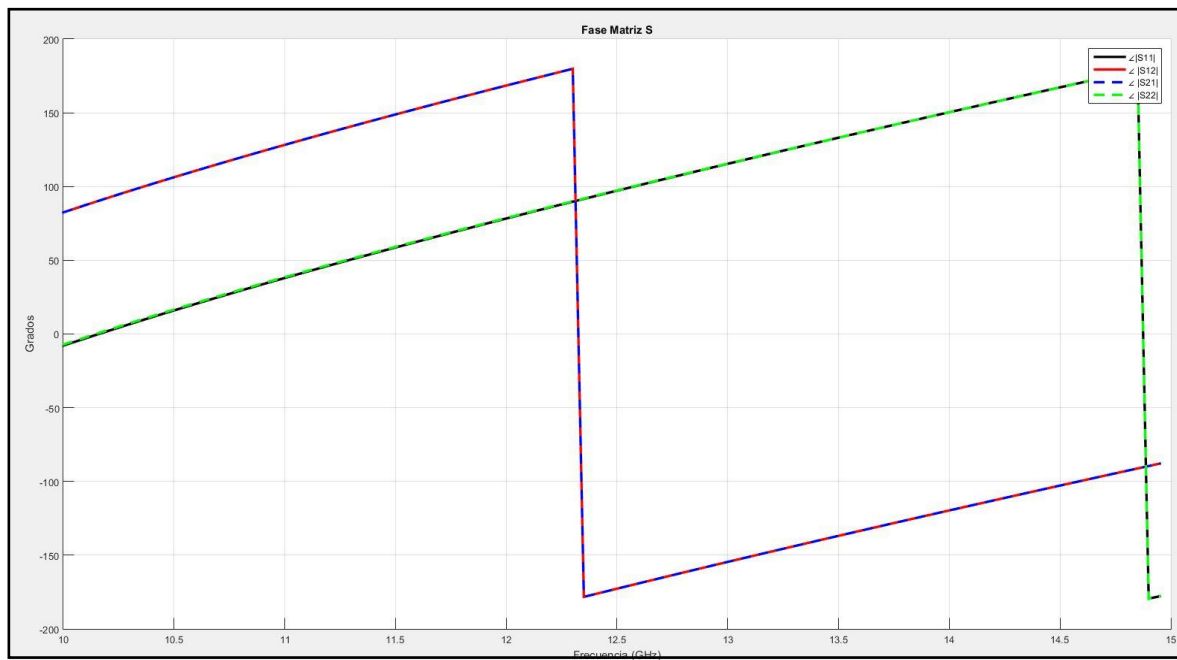


Figura 4.9: Fase matriz S guía rectangular con iris

4.4.2 Filtro RSE-Down TE₁₀₃

El siguiente dispositivo que se analizará será un filtro RSE (Relative Standard Error)-Down [7] tal y como se muestra en la siguiente figura:

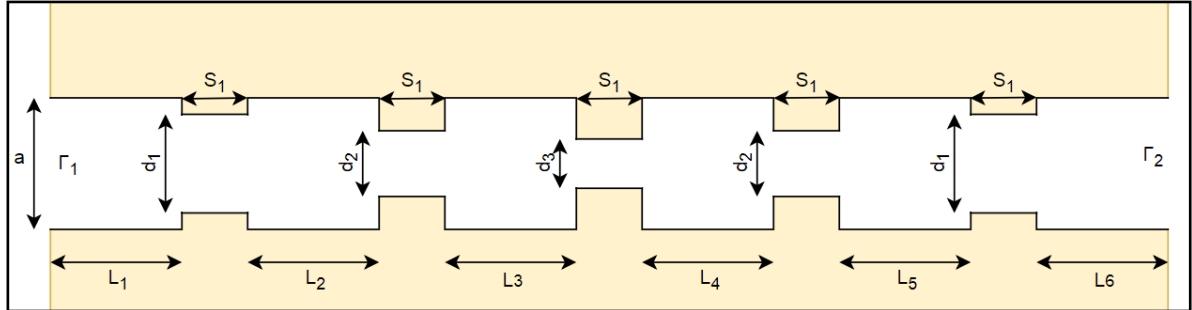


Figura 4.10: Filtro RSE-Down TE₁₀₃

Los filtros RSE-Down se sintetizan en guías de ondas rectangulares del tipo *in-line*, donde los resonadores e iris se alternan a lo largo del eje longitudinal. El filtro RSE-Down es uno de los dos canales adyacentes de un triplexor del satélite BEPI COLOMBO, donde cada canal debe satisfacer 25 dB de adaptación en la banda de paso, 15 dB de rechazo en la banda de paso del canal adyacente y 30 dB para la frecuencia central de dicho canal adyacente [7].

Las dimensiones del filtro que se implementará y analizará vienen definidos en la siguiente tabla:

	Valor	Dimensión
a	7.11	mm
b	3.16	mm
L₁	17.78	mm
L₂	17.65	mm
L₃	18.16	mm
L₄	18.16	mm
L₅	17.65	mm
L₆	17.78	mm
d₁	3.36	mm
d₂	2.1	mm
d₃	1.97	mm
S₁	1.5	mm

Tabla 4.6: Dimensiones filtro RSE-Down TE₁₀₃

En cuanto al rango de frecuencias para el cual se simulará el filtro es de 31.90 – 32.60 GHz.

El resultado de la subdivisión del área total resultado del primer proceso realizado para la implementación del método de elementos finitos es el siguiente:

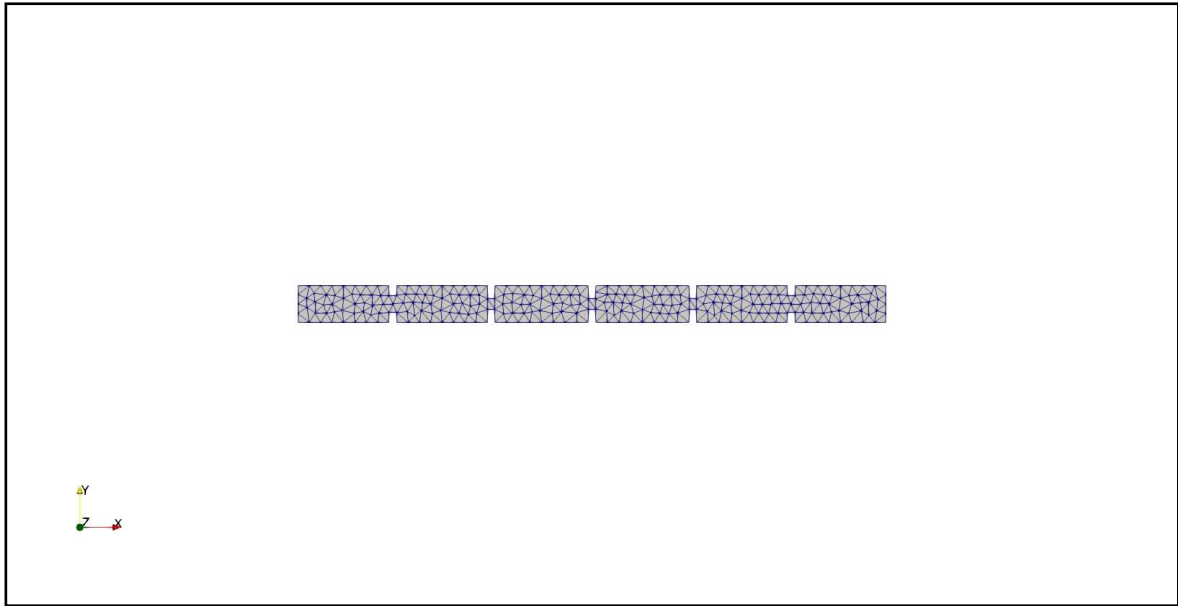


Figura 4.11: Mesh filtro RSE-Down TE_{103} . N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

Los parámetros de la matriz de dispersión obtenidos para el filtro RSE- TE_{103} obtenidos en el rango de frecuencias bajo estudio se encuentran en las siguientes gráficas de módulo y fase:

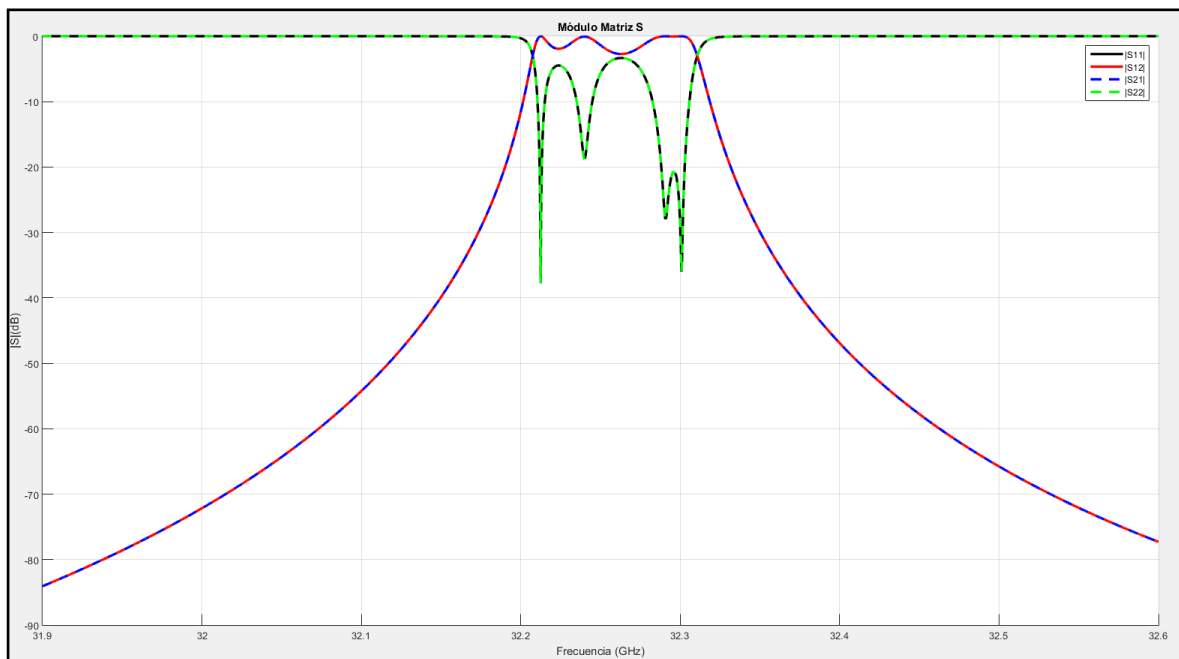


Figura 4.12: Amplitud matriz S Filtro RSE-Down TE_{103}

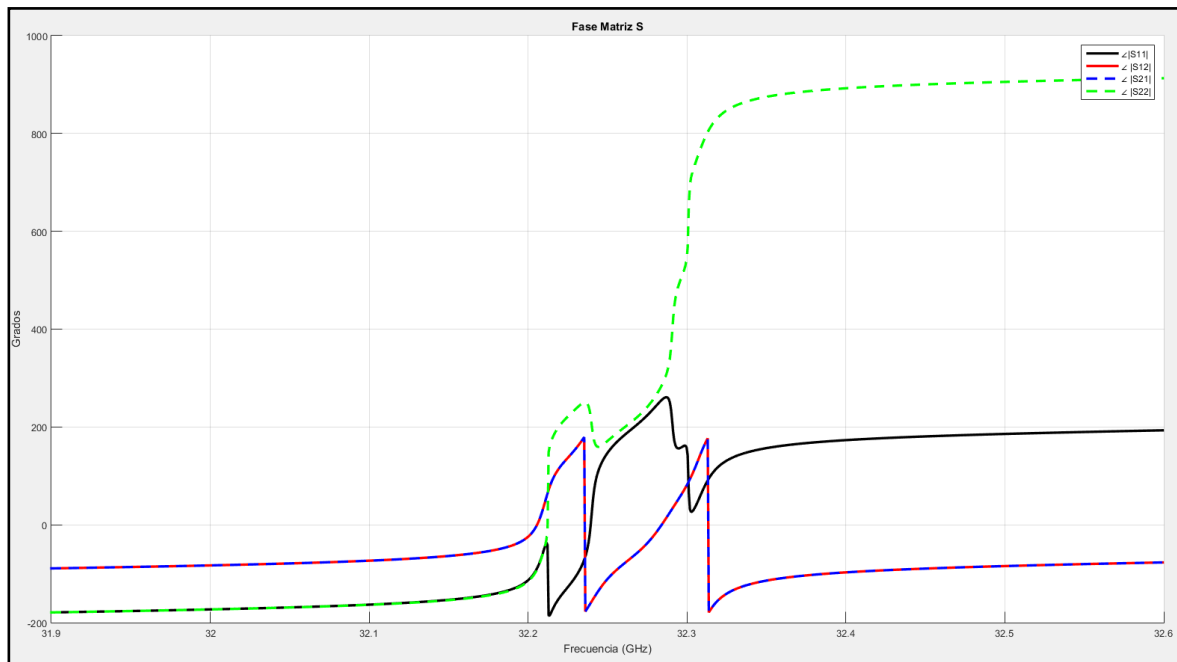


Figura 4.13: Fase matriz S Filtro RSE-Down TE₁₀₃

4.4.3 Acoplador ocho puertos

En este apartado se analizará un acoplador ocho puertos formado por guías de ondas rectangulares tal y como se muestra en la siguiente figura:

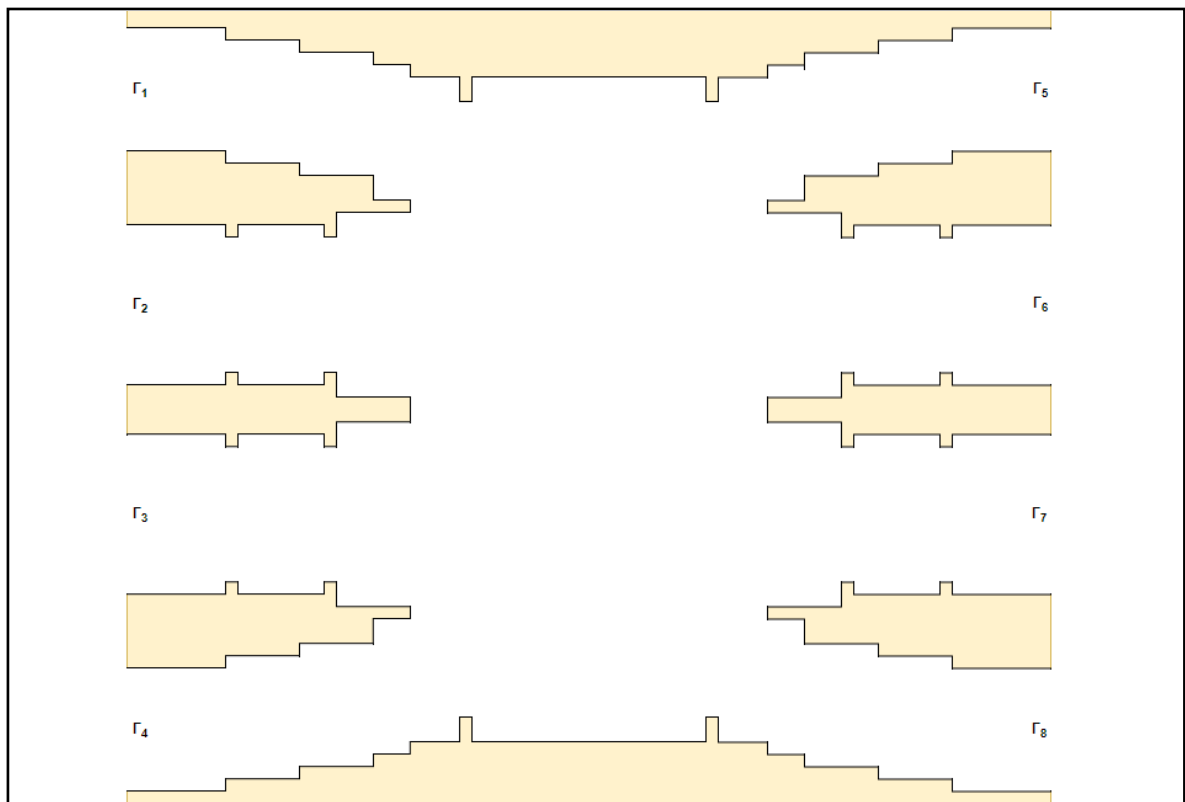


Figura 4.14: Acoplador ocho puertos

Las dimensiones del acoplador debido al número de puntos que este tiene se ponen con más detalle en el Anexo A. Este dispositivo está basado en una guía de onda rectangular estándar WR-51 [4], cuyas dimensiones básicas son $a=12.954$ mm y $b=6.477$ mm. El rango de frecuencias de simulación es 14 – 16 GHz.

Los resultados de este dispositivo son conocidos ya que es un dispositivo analizado previamente, aunque el análisis se implementado no es el método de elementos finitos lo que nos puede servir para comparar la precisión de FEM.

Al igual que en los otros dispositivos analizados el primer paso implementado es la subdivisión del área total bajo estudio:

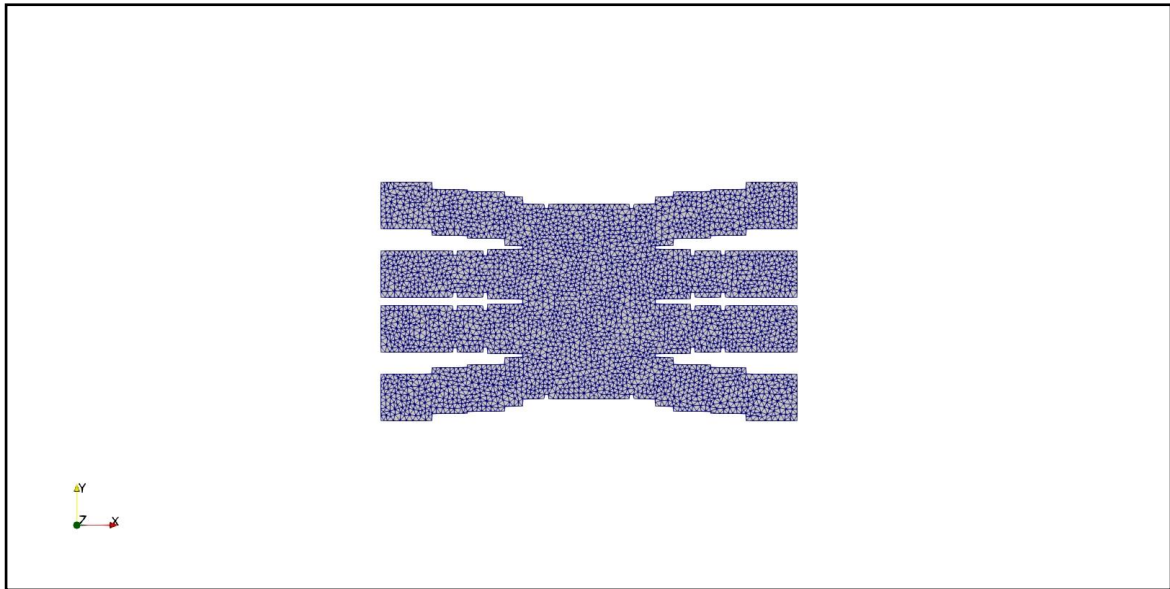


Figura 4.15: Mesh acoplador ocho puertos. N° Elementos: 1256. Grados de Libertad: 3014

A la hora de implementar este dispositivo se ha tenido que modificar las dimensiones geométricas de este dispositivo para atenuar los modos superiores al modo fundamental TE_{10} . Más concretamente, las dimensiones modificadas son los valores de las longitudes “a” donde se han añadido 3.79 mm y la longitud de los puertos respecto a la primera discontinuidad donde se ha añadido 2 mm.

Una vez modificado estos valores se ha implementa el dispositivo. Los resultados que se presentarán a continuación son algunos de los parámetros más significativos de la matriz de dispersión (amplitud y fase) comparados con los resultados conocidos obtenidos mediante simulaciones en CST del dispositivo:

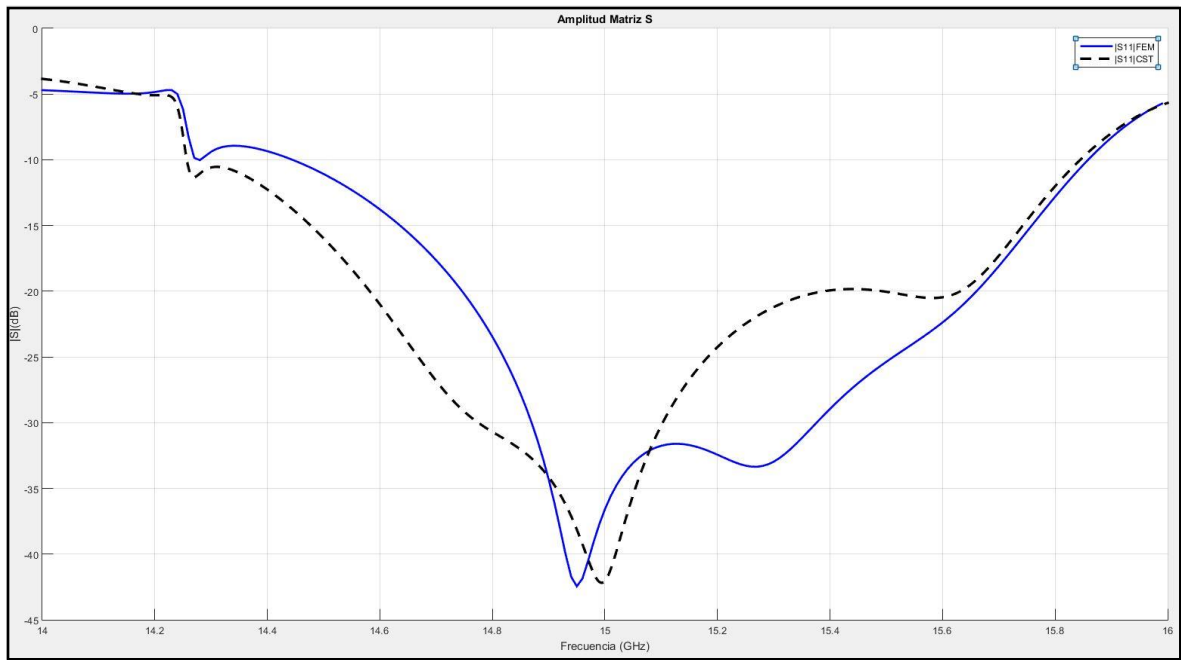


Figura 4.16: Módulo S_{11} acoplador

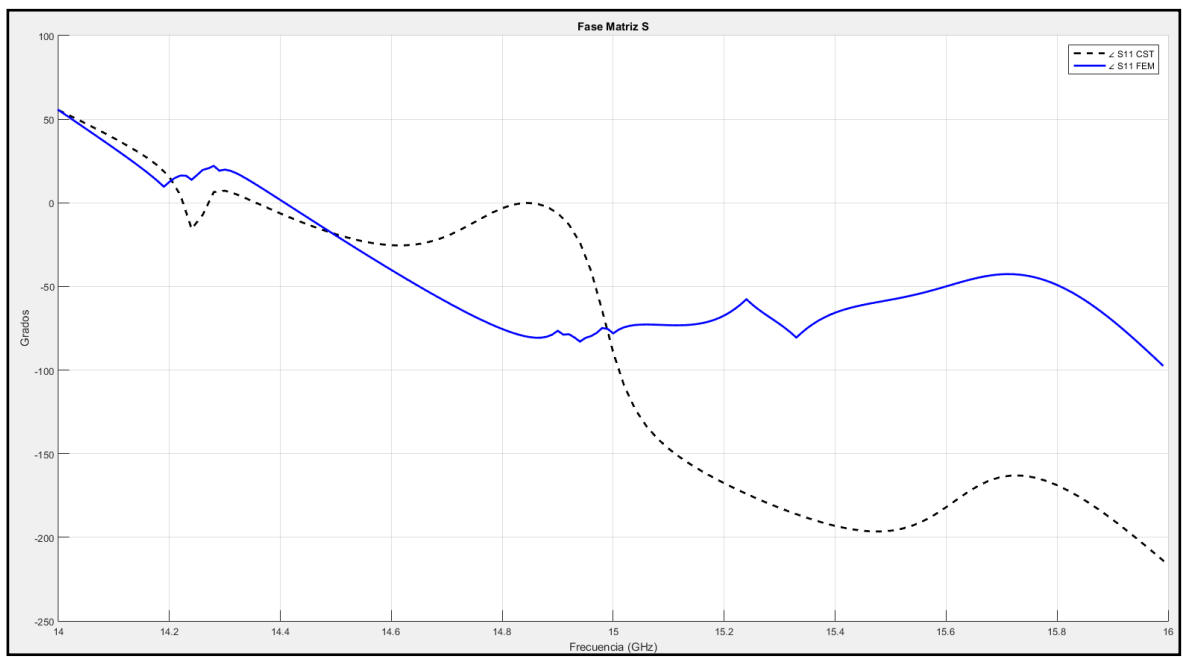


Figura 4.17: Fase S_{11} acoplador

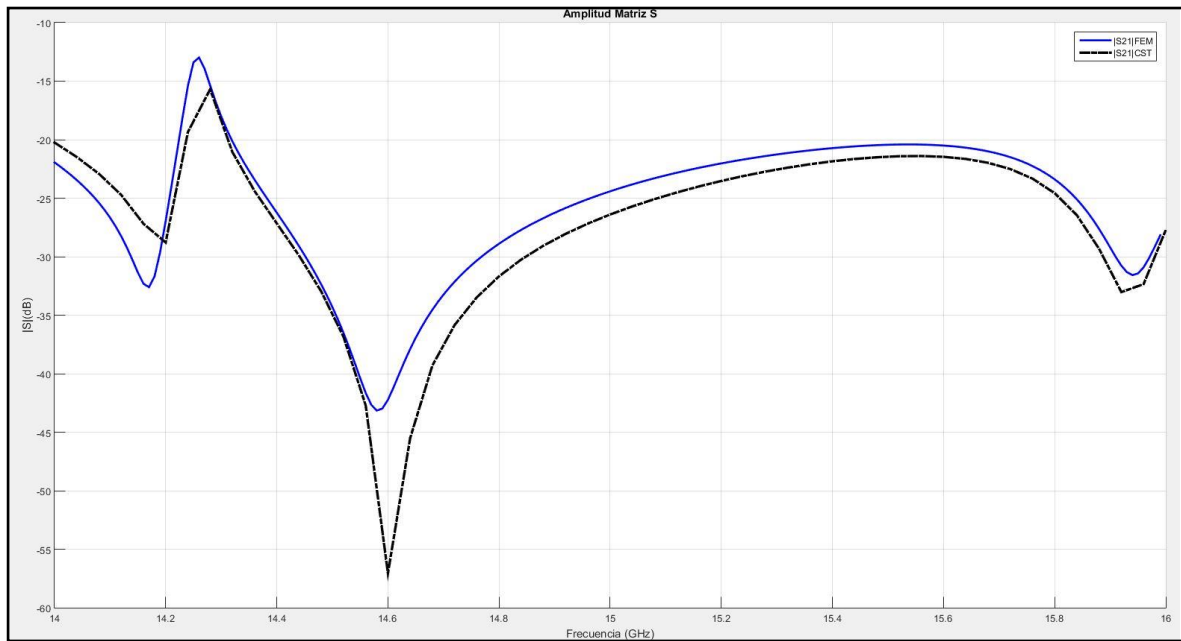


Figura 4.18: Módulo S_{21} acoplador

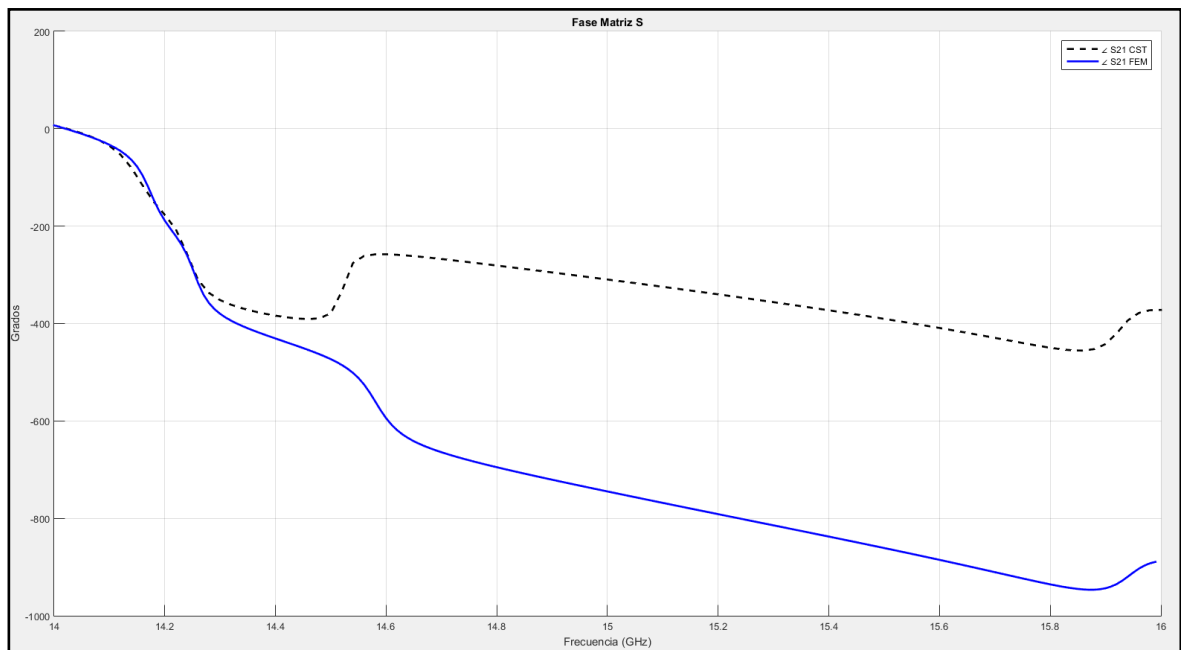


Figura 4.19: Fase S_{21} acoplador

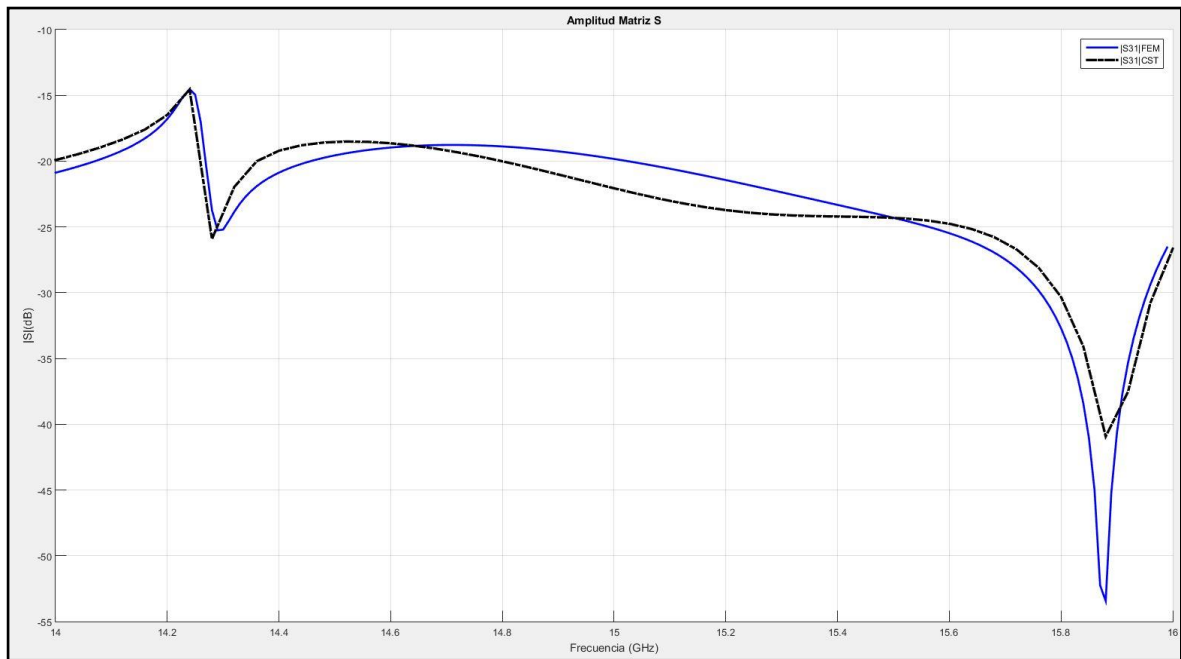


Figura 4.20: Módulo S_{31} acoplador

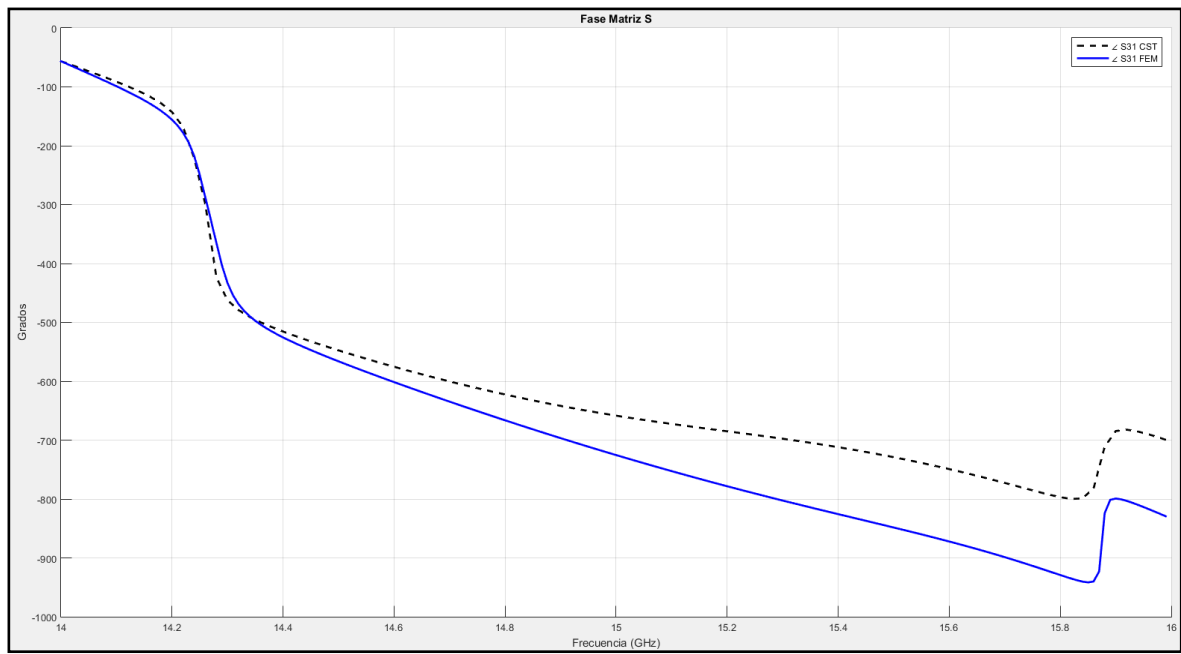


Figura 4.21: Fase S_{31} acoplador

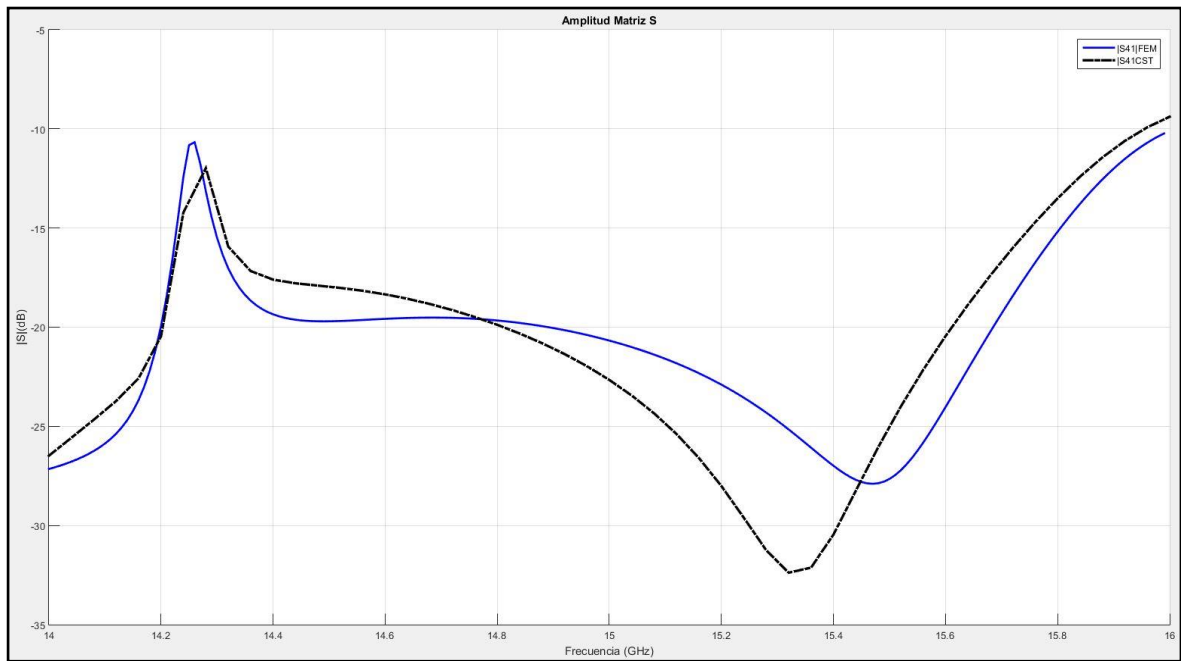


Figura 4.22: Módulo S_{11} acoplador

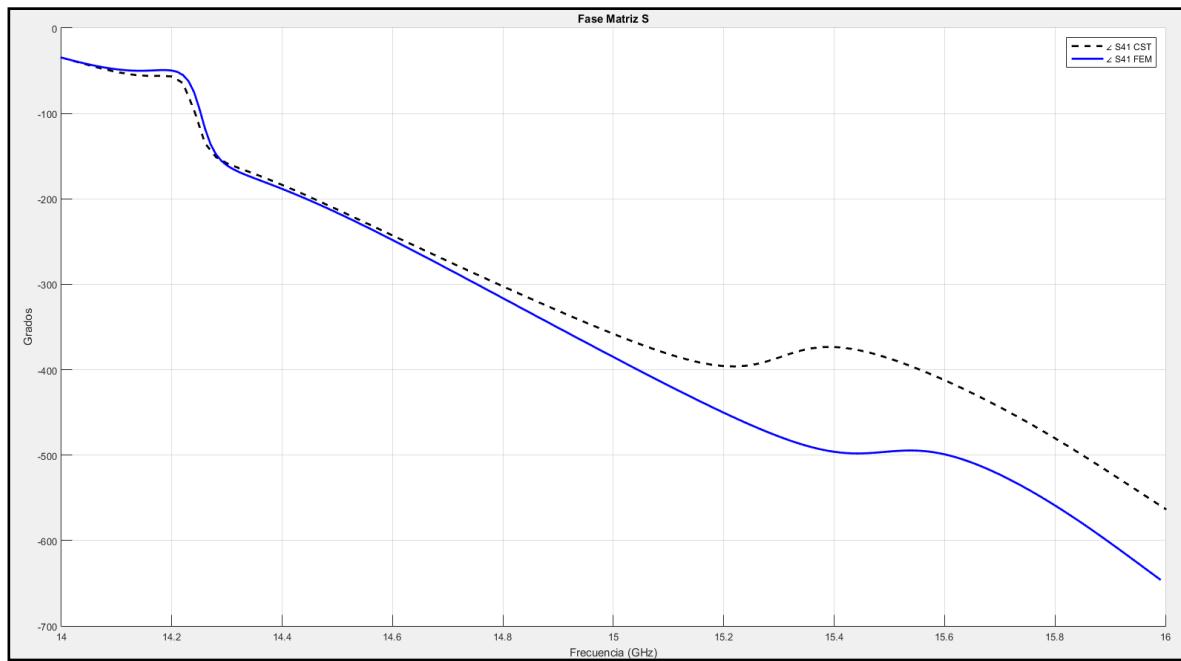


Figura 4.23: Fase S_{11} acoplador

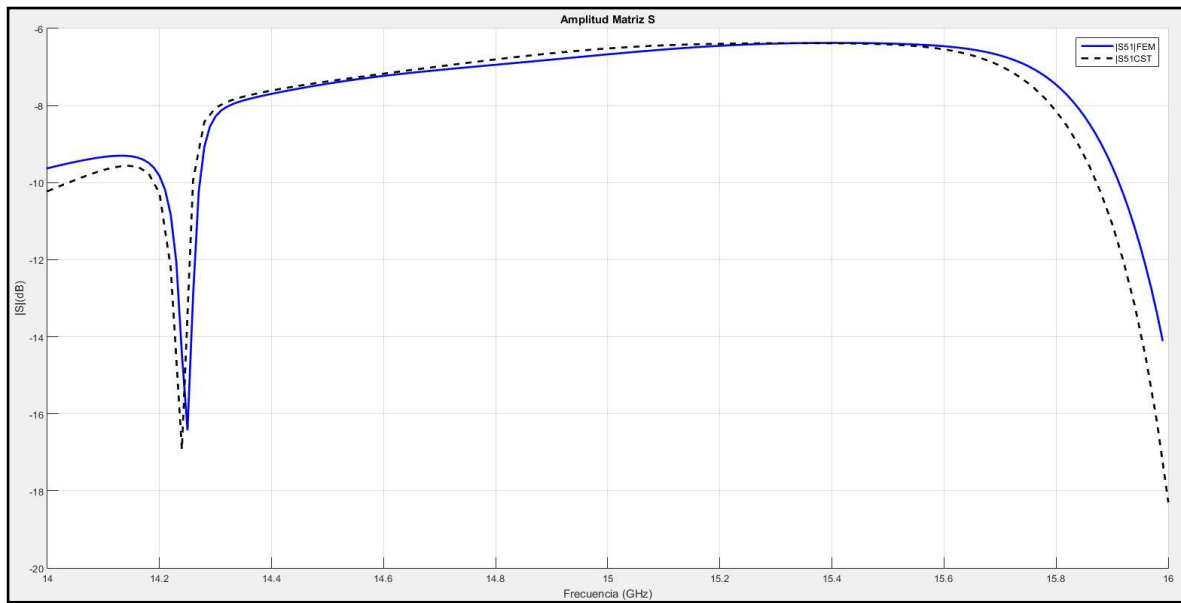


Figura 4.24: Módulo S_{11} acoplador

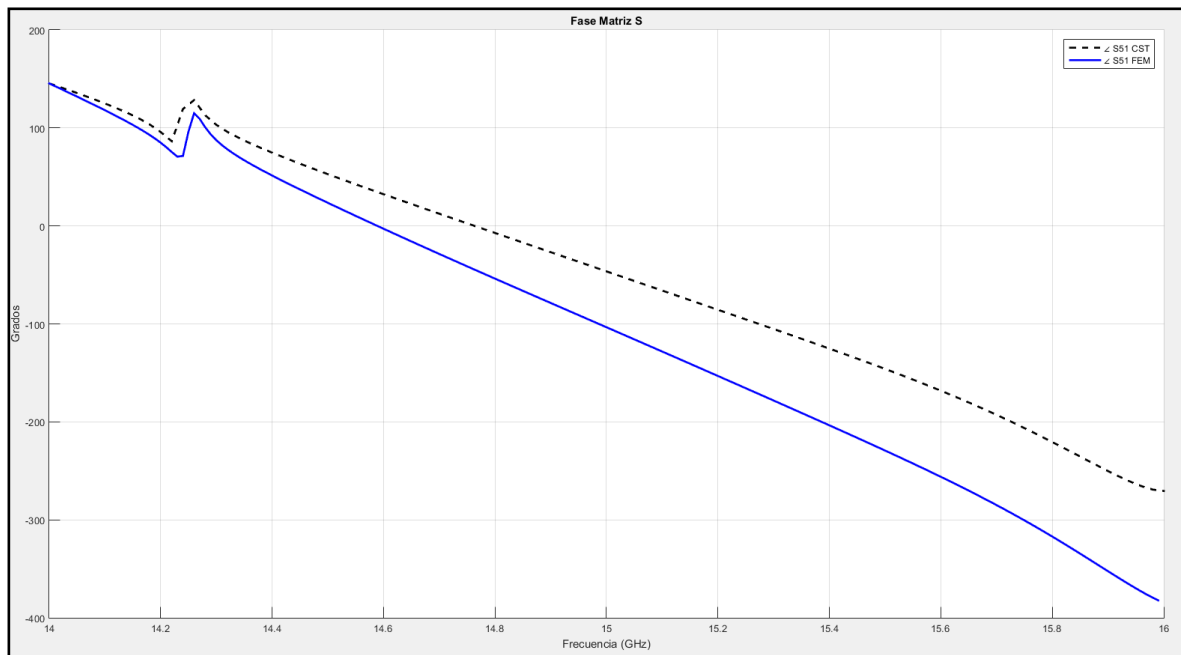


Figura 4.25: Fase S_{11} acoplador

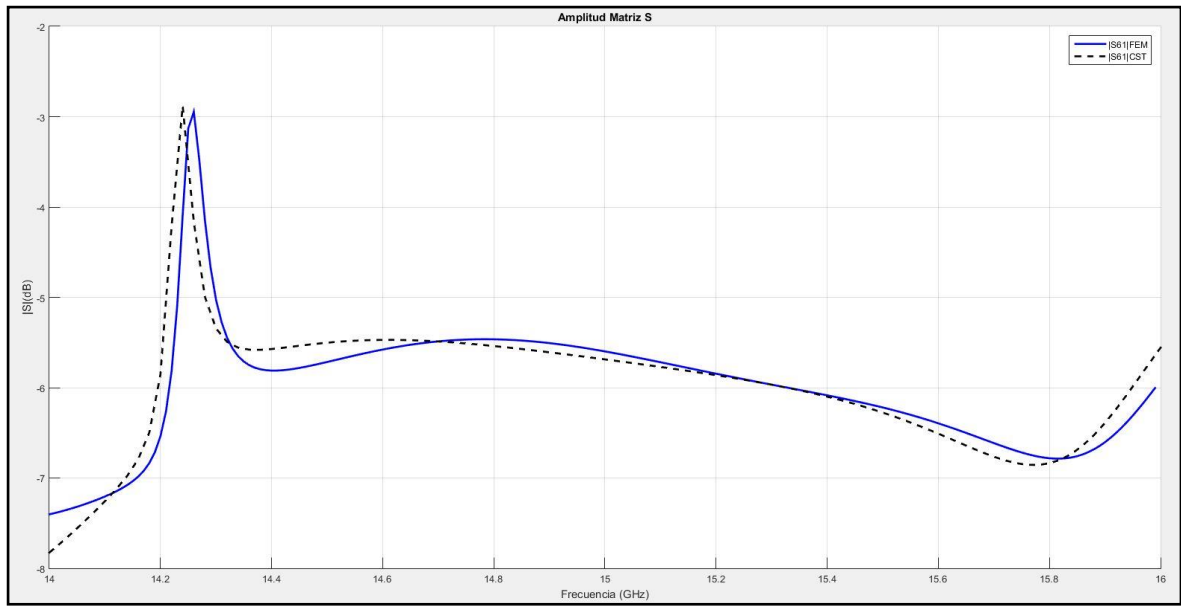


Figura 4.26: Módulo S_{61} acoplador

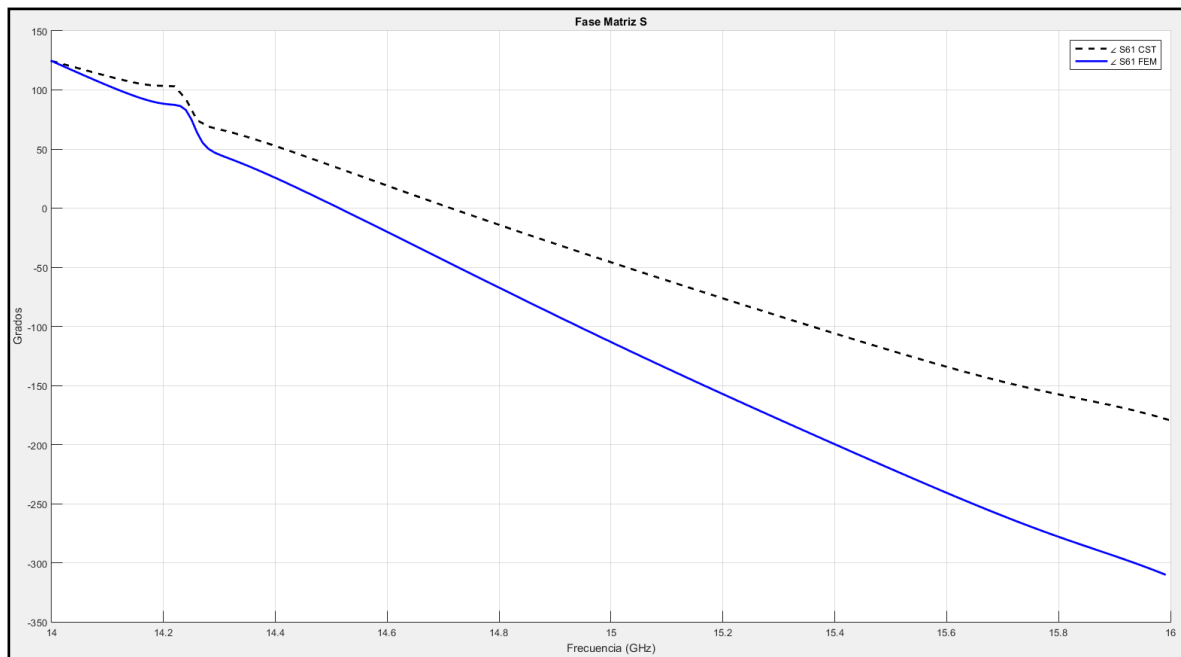


Figura 4.27: Fase S_{61} acoplador

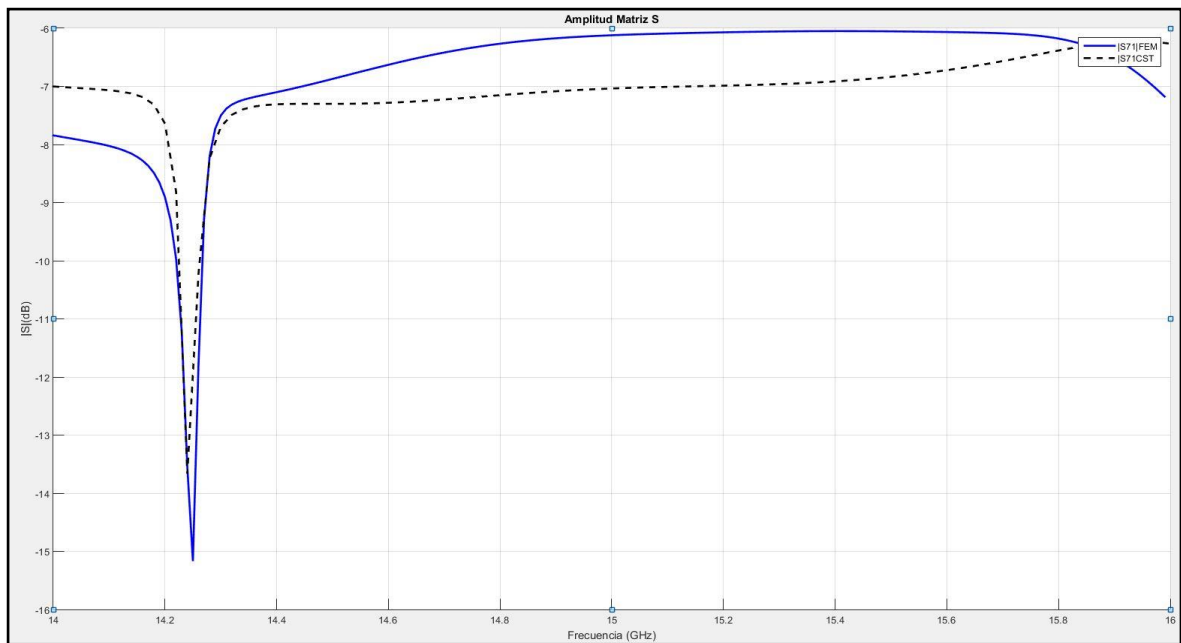


Figura 4.28: Módulo S_{71} acoplador

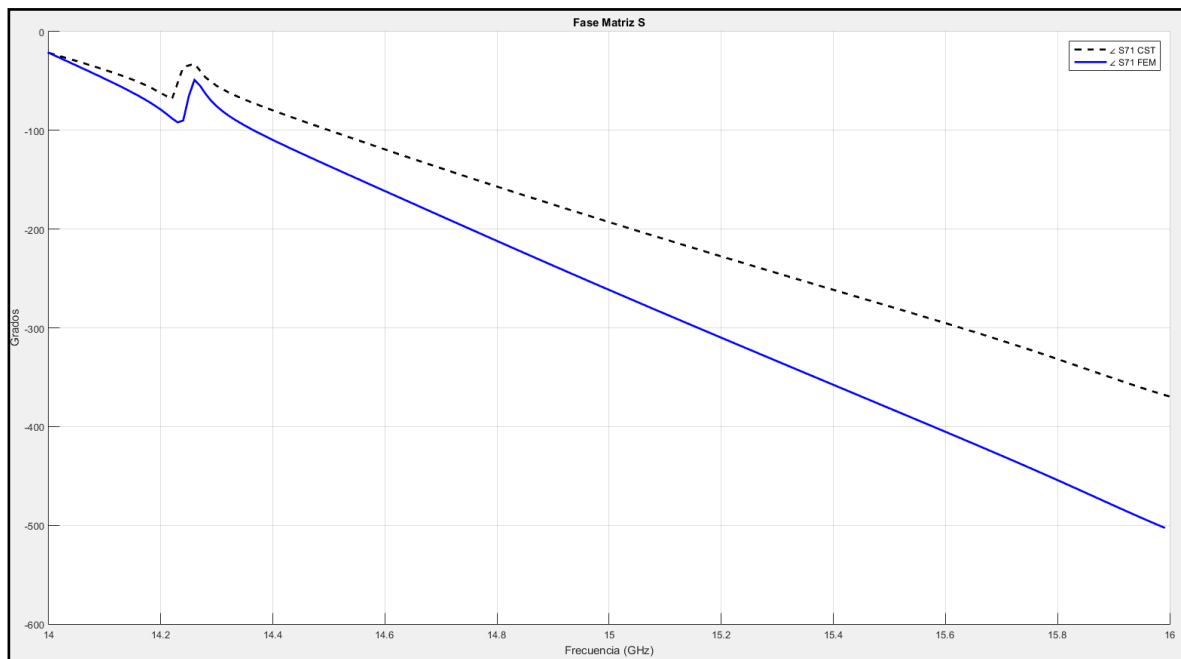


Figura 4.29: Fase S_{71} acoplador

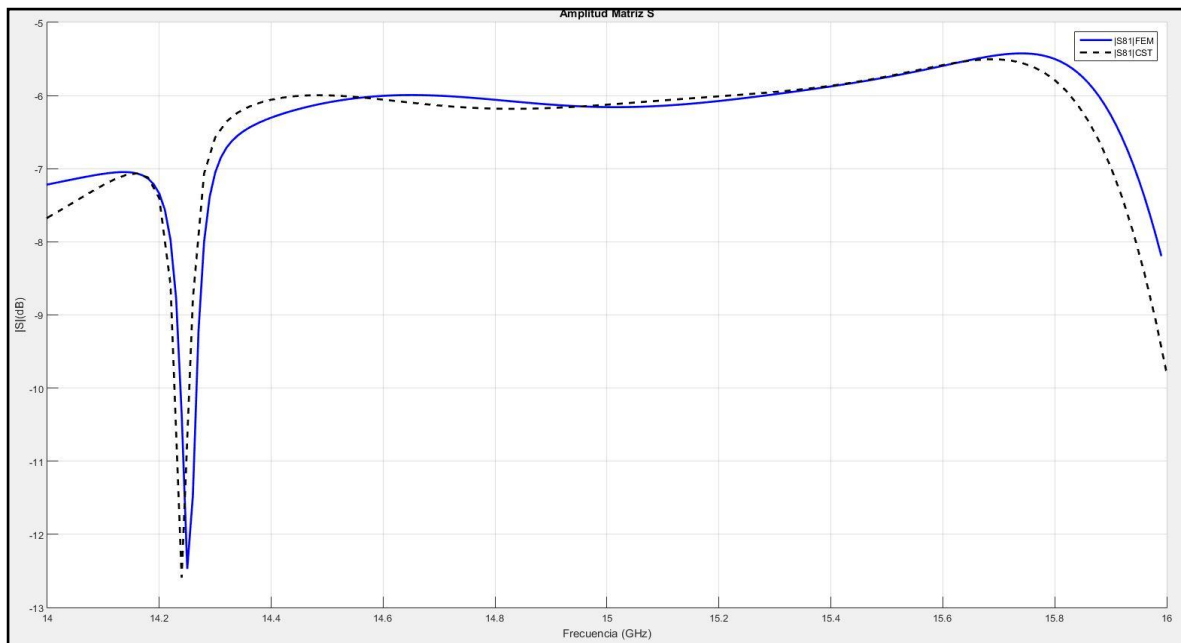


Figura 4.30: Módulo S_{11} acoplador

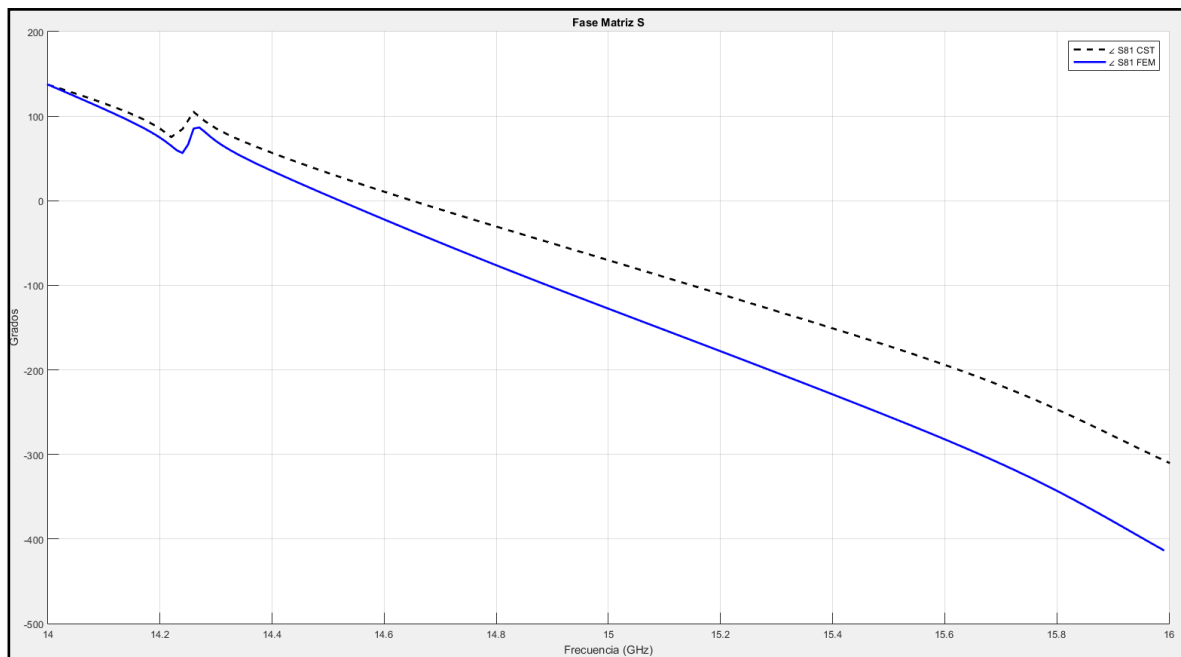


Figura 4.31: Fase S_{11} acoplador

Los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos se ha comparado con los resultados obtenidos por el programa comercial CST. A partir de los resultados obtenidos podemos concluir que la aproximación implementada por el método de elementos finitos frente a los de CST es muy precisa, siendo una mejor aproximación en los módulos que en las fases. En los resultados presentados también se puede apreciar un desplazamiento en la frecuencia debido a dicha aproximación, sin ser este desplazamiento muy grande.

5 Plano E

Las uniones de guía de ondas rectangulares con sección transversal uniforme al plano que contiene el campo eléctrico son generalmente denominadas como uniones plano E. Suponiendo que uno o más puertos del dispositivo se excitan con el modo TE_{10} y que el dispositivo se encuentra formado por guías de ondas homogéneas, las componentes del campo necesario para el análisis eléctrico de la unión plano E es H_x [1].

En este apartado se presentará la formulación necesaria para el análisis de estos dispositivos mediante el método de elementos finitos, la implementación de esta formulación a través de FEniCS, la comprobación de este programa y finalmente el análisis de varios dispositivos plano E.

Al igual que el plano H, el análisis de dispositivos plano E consiste en la obtención de la matriz de dispersión que caracteriza el dispositivo.

5.1 Formulación

Consideremos un dispositivo plano E genérico como se ve en la figura:

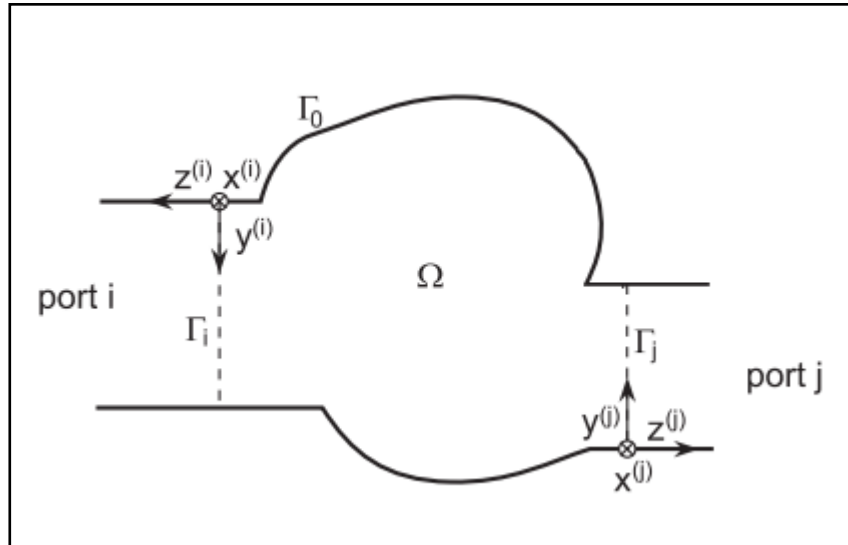


Figura 5.1: Plano E genérico [1]

Donde se sabe que el dispositivo tiene dos puertos situados a lo largo del eje z con una forma arbitraria entre los puertos. Este dispositivo genérico se encuentra formado por guías de ondas rectangulares excitado en uno o en los dos puertos con el modo fundamental TE_{10} .

Como se ha mencionado anteriormente las componentes del campo magnético necesario para el análisis del dispositivo es H_x . La componente x del campo magnético en la guía de onda k, cuando el puerto j se encuentra excitado con el modo fundamental TE_{10} se expresa de manera genérica como:

$$h_{xwg}^{(k)}(y^{(k)}) = \delta_{kj} h_0^{(j)}(y^{(j)}) e^{j\beta_0^{(j)} z^{(j)}} - B_0^{(k)} h_0^{(k)}(y^{(k)}) e^{-j\beta_0^{(k)} z^{(k)}} \quad (5.1)$$

Dado que se asume que todos los puertos se encuentran excitados únicamente por el modo TE₁₀ las definiciones que se muestran a continuación solo harán referencia a este modo donde m=1 y n=0.

De la ecuación (5.1), $h_0^{(k)}$ se define para el modo TE₁₀ (n=0) como:

$$h_0^{(k)}(y^{(k)}) = \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} \quad (5.2)$$

En las ecuaciones (5.1) y (5.2), se muestra la constante de propagación $\beta_0^{(k)}$ y el factor de normalización $G_0^{(k)}$ [1]:

$$\begin{cases} \beta_0^{(k)} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} & \text{para } k_0^2 \geq \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \\ \beta_0^{(k)} = -j\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_0^2} & \text{para } k_0^2 < \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \end{cases} \quad (5.3)$$

$$G_0^{(k)} = 2 \sqrt{\frac{2Z_0}{ab^{(k)}k_0\beta_0^{(k)}\left[k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]}} \quad (5.4)$$

Al igual que en la formulación del plano H, para plantear el sistema de ecuaciones necesario para resolver la matriz de dispersión del dispositivo se necesita tener en cuenta las condiciones de contorno en la pared metálica del dispositivo (Γ_0) y las condiciones de continuidad en los puertos k (Γ_k):

$$\frac{\partial h_x}{\partial n} = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial n|_{\Gamma_k}} = \frac{\partial h_{xwg}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \quad k = 1, \dots, N \quad (5.6)$$

Para plantear el sistema de ecuaciones necesarios para la obtención de la matriz de dispersión del dispositivo se parte de la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla_t^2 h_x + k_t^2 h_x = 0 \quad (5.7)$$

Donde $k_t^2 = k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$. Siguiendo el mismo proceso que en el plano H, donde la ecuación de Helmholtz se multiplicaba por una función de test W, aplicando la ecuación (5.6) y la identidad de Green, se llega al sistema de ecuaciones a resolver [1]:

$$\iint_{\Omega} \nabla_t W \cdot \nabla_t h_x d\Omega - k_t^2 \iint_{\Omega} W h_x d\Omega - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} W \frac{\partial h_{xwg}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} d\Gamma_k = 0 \quad (5.8)$$

$$\int_{\Gamma_k} W h_x d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} W h_{xwg}^{(k)} d\Gamma_k \quad k = 1, \dots, N \quad (5.9)$$

Para poder resolver el sistema de ecuaciones formado por estas dos ecuaciones (5.8) y (5.9) mediante el método de elementos finitos el primer paso es poder aplicar una aproximación de estas dos ecuaciones planteadas para el área total bajo estudio Ω en cada uno de los

elementos resultantes de la subdivisión necesaria para el método de elementos finitos. Cada uno de estos elementos menores los denominaremos como (e).

La función de aproximación para cada elemento (e), $\bar{H}_x^{(e)}$, se define como:

$$\bar{H}_x^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^{N^{(e)}} \bar{H}_{xj}^{(e)} \alpha_j^{(e)}(x, y) \quad (5.10)$$

Donde $\alpha_j^{(e)}$ es una función de test. La función de test W de las ecuaciones (5.8) y (5.9) se puede definir también como $W = \alpha_j^{(e)}$. Aplicando la ecuación (5.10) en la ecuación (5.8) obtenemos la forma débil de la ecuación de Helmholtz para cada elemento (e):

$$\iint_{\Delta^{(e)}} \nabla_t \alpha_j^{(e)} \cdot \nabla_t \bar{H}_x^{(e)} d\Omega - k_t^2 \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_j^{(e)} \bar{H}_x^{(e)} d\Omega - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_j^{(e)} \frac{\partial \bar{h}_{xwg}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} d\Gamma_k = 0 \quad (5.11)$$

Esta ecuación expresada en forma matricial:

$$[S^{(e)}] \cdot [\bar{H}_x^{(e)}] - k_t^2 [T^{(e)}] \cdot [\bar{H}_x^{(e)}] + \sum_{k=1}^N \{ [C_k^{(e)}] \cdot [B_k] - [E_k^{(e)}] \} = 0 \quad (5.12)$$

En esta ecuación matricial, el objetivo del análisis es obtener la matriz B o matriz de dispersión [1]. Las matrices $[S^{(e)}]$ y $[T^{(e)}]$ con sus respectivos coeficientes se puede expresar como una única matriz:

$$[F^{(e)}] = \iint_{\Delta^{(e)}} \nabla_t \alpha_j^{(e)} \cdot \nabla_t \bar{H}_x^{(e)} d\Omega - k_t^2 \iint_{\Delta^{(e)}} \alpha_j^{(e)} \bar{H}_x^{(e)} d\Omega \quad (5.13)$$

La matriz $[C_k^{(e)}]$, tiene como entradas:

$$C_{kim}^{(e)} = -j\beta_0^{(k)} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} h_0^{(e)} d\Gamma_k^{(e)} \quad (5.14)$$

Donde sustituyendo $h_0^{(e)}$ según la ecuación (5.2):

$$C_{kim}^{(e)} = -j\beta_0^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} d\Gamma_k^{(e)} \quad (5.15)$$

Por otro lado la matriz $[E_k^{(e)}]$ tiene como entradas:

$$E_{kim}^{(e)} = j\beta_0^{(k)} \delta_{kl} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} h_0^{(e)} d\Gamma_k^{(e)} \quad (5.16)$$

Donde al igual que en el caso anterior sustituyendo la ecuación (5.2):

$$E_{kim}^{(e)} = j\beta_0^{(k)} \delta_{kl} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} \int_{\Gamma_k^{(e)}} \alpha_i^{(e)} d\Gamma_k^{(e)} \quad (5.17)$$

Donde la delta de Kronecker, δ_{kl} , tomará el valor de uno, cuando $k=l$.

Las matrices que se forman a partir de las ecuaciones (5.13), (5.15) y (5.17), son las matrices locales de cada elemento (e), que se ensamblarán para la única área total:

$$[F] \cdot [\bar{H}] + [C] \cdot [B] = [E^{inc}] \quad (5.18)$$

Esta ecuación resultado del ensamblaje de las matrices locales es la primera ecuación del sistema a resolver para obtener la matriz de dispersión del dispositivo.

Para obtener la segunda ecuación del sistema se parte de la ecuación (5.9). En dicha ecuación se sustituirá la función de test por:

$$W_1^{(k)} = \cos(n \frac{\pi}{a^{(k)}} y^{(k)}) \quad (5.19)$$

Dado que todos los puertos del dispositivo se encuentran excitados únicamente por el modo TE₁₀ (n=0):

$$W_1^{(k)} = 1 \quad (5.20)$$

Aplicando las ecuación (5.20) y (5.1) en la ecuación (5.9):

$$\int_{\Gamma_k} \bar{H}_x d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} \delta_{kj} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} d\Gamma_k - \int_{\Gamma_k} B_m^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} d\Gamma_k \quad (5.21)$$

Resolviendo las integrales se obtiene el sistema y teniendo en cuenta que \bar{H}_x es una función de test de la misma familia que $\alpha_j^{(k)}$:

$$\int_{\Gamma_k} \alpha_j^{(k)} d\Gamma_k + b^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} - b^{(k)} \delta_{kj} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} = 0 \quad (5.22)$$

Pudiendo expresarse igualmente en forma matricial como:

$$[D_k] \cdot [H_x^{(k)}] + [A_k] \cdot [B_k] - [H_k] = 0 \quad (5.23)$$

Donde las entradas de la matriz $[D_k]$:

$$D_{kj} = \int_{\Gamma_k} \alpha_j^{(k)} d\Gamma_k \quad (5.24)$$

Las entradas de la matriz $[A_k]$:

$$A_{kj} = b^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} \quad (5.25)$$

Y las entradas de la matriz $[H_k]$:

$$H_{kj} = b^{(k)} \delta_{kj} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} \quad (5.26)$$

La matriz $[H_k]$ es considerada como la matriz del campo magnético incidente en el puerto k por lo que se denominará como $[H^{inc}]$.

Las dos ecuaciones (5.18) y (5.22) conforman el sistema a resolver, pudiéndose expresar como:

$$\begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [C] & [F] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B] \\ [E] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H^{inc}] \\ [E^{inc}] \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Este sistema de ecuaciones y cada una de las fórmulas que conforman el sistema se han desarrollado mediante el método de elementos finitos y se puede resolver mediante el programa FEniCS.

5.2 Implementación

En este apartado se va a desarrollar el proceso realizado para la resolución del sistema (5.27) y sus particularidades.

Podemos dividir la implementación de este sistema en dos partes una primera parte que se implementará gracias al programa FEniCS [3] y una segunda parte que debido a su simplicidad en el número de cálculos puede resolverse mediante numpy.

En la primera parte de la resolución del código se parte de la (5.27) y se expresa en una sola ecuación a resolver:

$$([A] - [D] \cdot [F^{-1}] \cdot [C]) \cdot [B] = [H^{inc}] - [D] \cdot [F^{-1}] \cdot [E^{inc}] \quad (5.28)$$

En esta ecuación el objetivo para el análisis del dispositivo es obtener la matriz de dispersión $[B]$. En esta primera parte de la resolución es en la que más carga de operaciones tiene ya que es la que implementa el método de elementos finitos del problema, subdividiendo el área total Ω , aplicando sobre cada elemento las ecuaciones correspondientes y posteriormente ensamblando cada uno de los resultados de las ecuaciones en el área total teniendo en cuenta la ponderación de cada elemento individual.

Esta primera parte implementada mediante el programa FEniCS, como se ha comentado en el apartado de implementación del plano H, trabajar con FEniCS tiene como inconveniente que no puede trabajar con números complejos. Por ello en esta primera parte de la implementación que se utilizará con FEniCS se eliminará el componente complejo de las matrices $[C]$ y $[E^{inc}]$ ($j\beta_0^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}}$), que se añadirán tras el procesado de FEniCS, quedando las matrices resultados de las multiplicaciones como:

$$[X] = \frac{[F^{-1}] \cdot [C]}{j\beta_0^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}}} \quad (5.29)$$

$$[Y] = \frac{[F^{-1}] \cdot [E^{inc}]}{j\beta_0^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}}} \quad (5.30)$$

Además, en esta primera parte de la implementación también se llevarán a cabo las operaciones de las ecuaciones que llevan a la obtención de las matrices $[A]$, $[D]$ y $[H^{inc}]$.

Finalmente, en la segunda parte del código, el primer paso es añadir las componente complejas eliminadas a las matrices $[X]$ e $[Y]$, a las que tras añadir su componente compleja las denominaremos como $[X^c]$ e $[Y^c]$.

$$[X^c] = j\beta_0^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} [X] \quad (5.31)$$

$$[Y^c] = j\beta_0^{(k)} \frac{G_0^{(k)}}{\sqrt{1+\delta_{00}}} [Y] \quad (5.32)$$

Tras obtener las matrices complejas, se pasa a la resolución del sistema (5.30), despejando la matriz de dispersión $[B]$ del sistema. Dado que esta resolución consta de matrices, se utilizará numpy para operar con las mismas debido a la sencillez con la que se tratan las operaciones matriciales. Finalmente la matriz de dispersión se obtiene:

$$[B] = ([H^{inc}] - [D] \cdot [Y^c]) \cdot ([A] - [D] \cdot [X^c])^{-1} \quad (5.33)$$

5.3 Comprobación Formulación

Para la comprobación del código implementado en Python (FEniCS y numpy) donde se ha implementado la solución de la matriz de dispersión $[B]$, se ha resuelto un caso sencillo de una guía de transmisión rectangular con uno de sus dos puertos terminado en un plano de conductor perfecto.

Al igual que en la comprobación del plano H, los casos concretos de estas guías de ondas serán de longitudes λ , $\frac{\lambda}{2}$ y $\frac{\lambda}{4}$ (Figura 5.2) [6]:

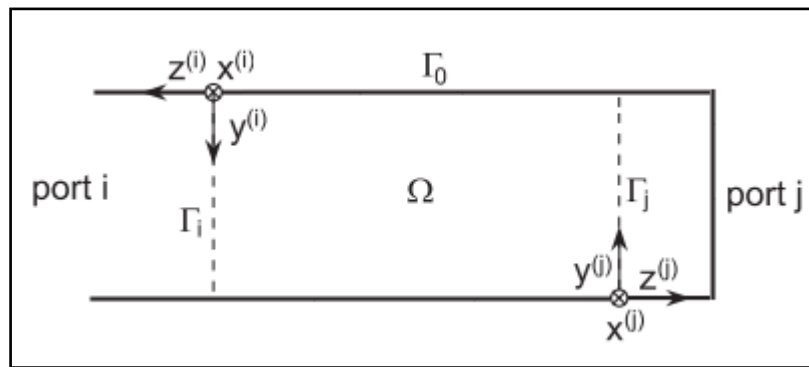


Figura 5.2: Guía plano E comprobación [1]

La figura 5.2 representa de manera genérica la guía de onda rectangular bajo estudio donde los distintos casos de comprobación serán iguales en características excepto la longitud.

Los parámetros que caracterizan las guías de ondas rectangulares se presentan en la siguiente tabla:

	Valor	Dimensión
a	0.5	cm
b	1/3	cm
f_{TE10}	29.98	GHz
f	32.98	GHz

Tabla 5.1: Parámetros guía de onda genérica

5.3.1 Guía λ

El primer ejemplo que se comprobará será el caso de una guía de onda rectangular de longitud λ . La longitud de la guía con los parámetros presentados en la tabla 5.1 da como resultado:

$$l = 2.18 \text{ [cm]} \quad (5.31)$$

En la siguiente figura se representa el área sobre la cual se aplicará el método de elementos finitos y la formulación desarrollada anteriormente. Sobre esta área total se muestra el resultado del mallado implementado mediante el método de elementos finitos:

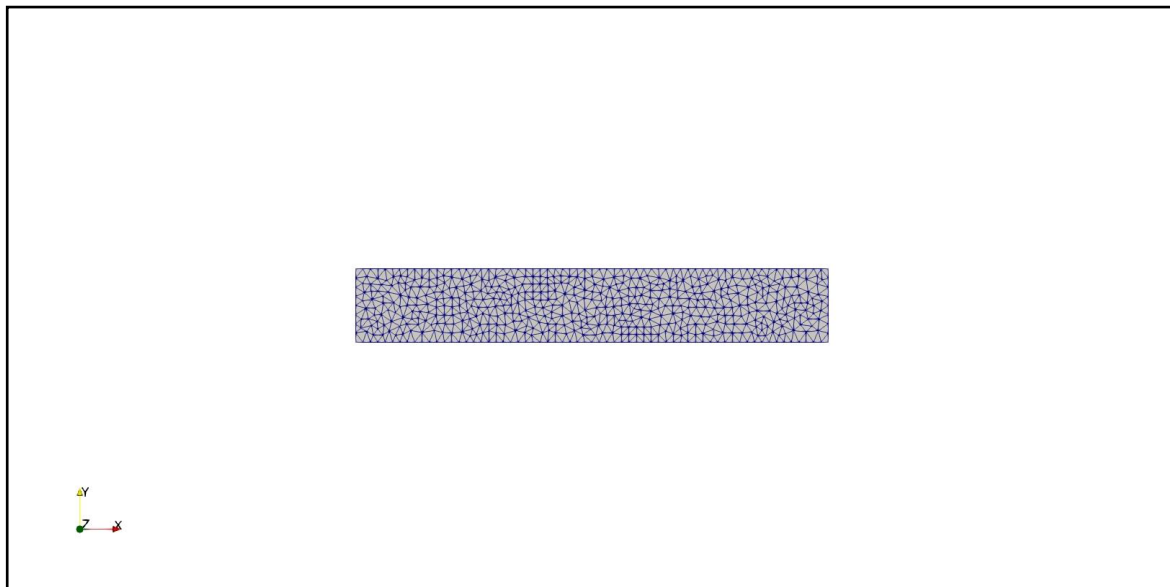


Figura 5.3: Mesh guía rectangular λ plano E. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

En la siguiente tabla se encuentran los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos junto con el valor teórico:

	Valor FEM	Valor teórico [6]	Dimensión
Módulo S_{11}	1	1	Naturales
Fase S_{11}	-179.99	-180	Grados

Tabla 5.2: FEM vs Teórico longitud λ

En la tabla se puede apreciar que la aproximación que implementa el método de elementos finitos es una aproximación muy fiable tanto en módulo como en fase.

5.3.2 Guía $\lambda/2$

En este segundo caso la longitud de la guía de onda rectangular es de $\lambda/2$, que con los datos de la tabla 5.1 se obtiene:

$$l = 1.09 \text{ [cm]} \quad (5.32)$$

El área total con su respectivo mallado obtenido mediante la implementación del primer paso del método de elementos finitos es:

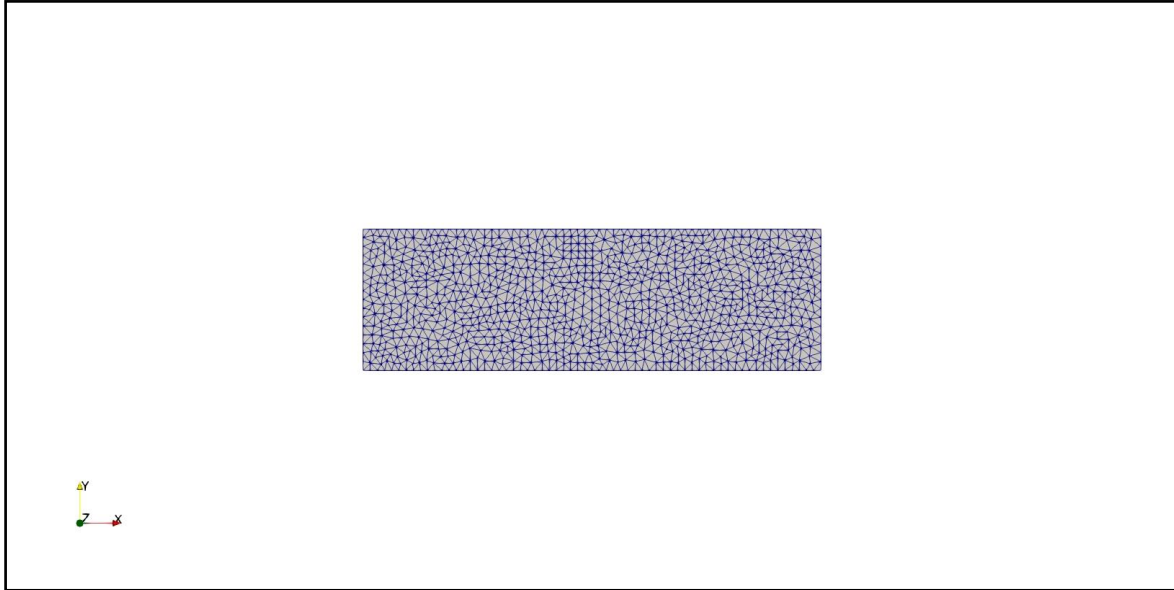


Figura 5.4: Mesh guía rectangular $\lambda/2$ plano E. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

En la siguiente tabla se encuentran los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos junto con el valor teórico:

	Valor FEM	Valor teórico [6]	Dimensión
Módulo S_{11}	1	1	Naturales
Fase S_{11}	-179.99	-180	Grados

Tabla 5.3: FEM vs Teórico longitud $\lambda/2$

Al igual que en el caso de λ , los valores obtenidos mediante el método de elementos finitos tienen un error mínimo comparados con los valores teóricos.

5.3.3 Guía $\lambda/4$

En último caso que se utilizará para la comprobación del código, la longitud de la guía de onda rectangular es de $\lambda/4$, que con los datos de la tabla 5.1 se obtiene:

$$l = 0.54 \text{ [cm]} \quad (5.33)$$

El área total con su respectivo mallado obtenido mediante la implementación del primer paso del método de elementos finitos es:

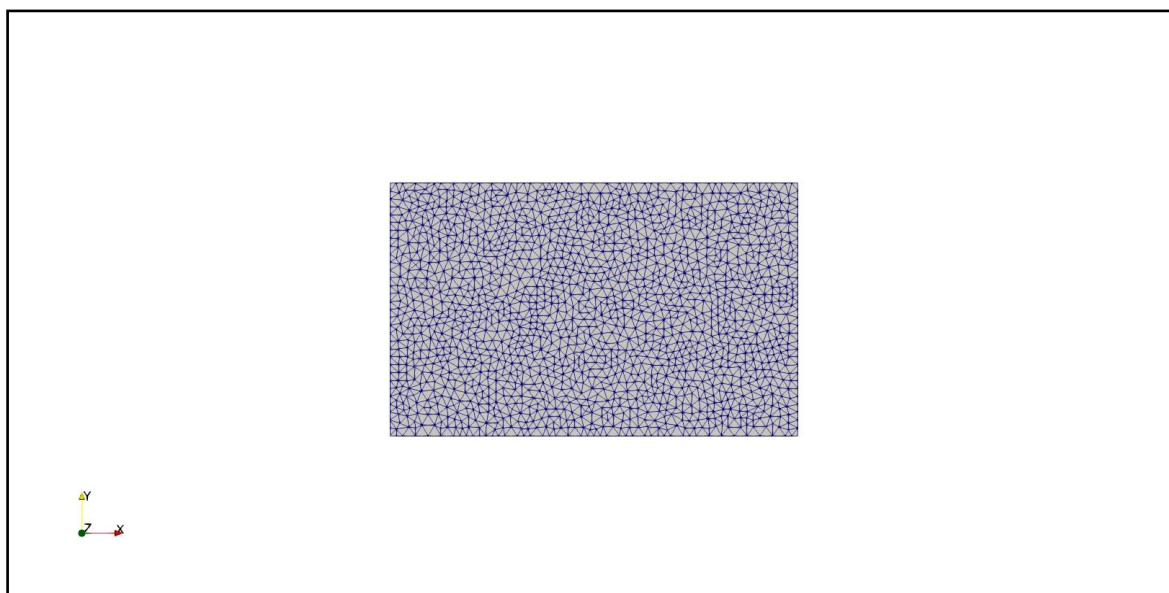


Figura 5.5: Mesh guía rectangular $\lambda/4$ plano E. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

En la siguiente tabla se encuentran los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos junto con el valor teórico:

	Valor FEM	Valor teórico [6]	Dimensión
Módulo S_{11}	1	1	Naturales
Fase S_{11}	$1.31 \cdot 10^{-7}$	0	Grados

Tabla 5.4: FEM vs Teórico longitud $\lambda/4$

Al igual que en los casos anteriores, los valores obtenidos mediante el método de elementos finitos tienen un error mínimo comparados con los valores teóricos.

5.4 Análisis de dispositivos

En este apartado se analizarán distintos dispositivos plano E, representando gráficamente algunos de los componentes de la matriz de dispersión de dichos dispositivos. Concretamente estos dispositivos constarán de tres modelos de divisores de potencia plano E [8].

5.4.1 Primer modelo de divisor

El primer modelo de divisor de potencia plano E que se analizará se representa en la siguiente figura:

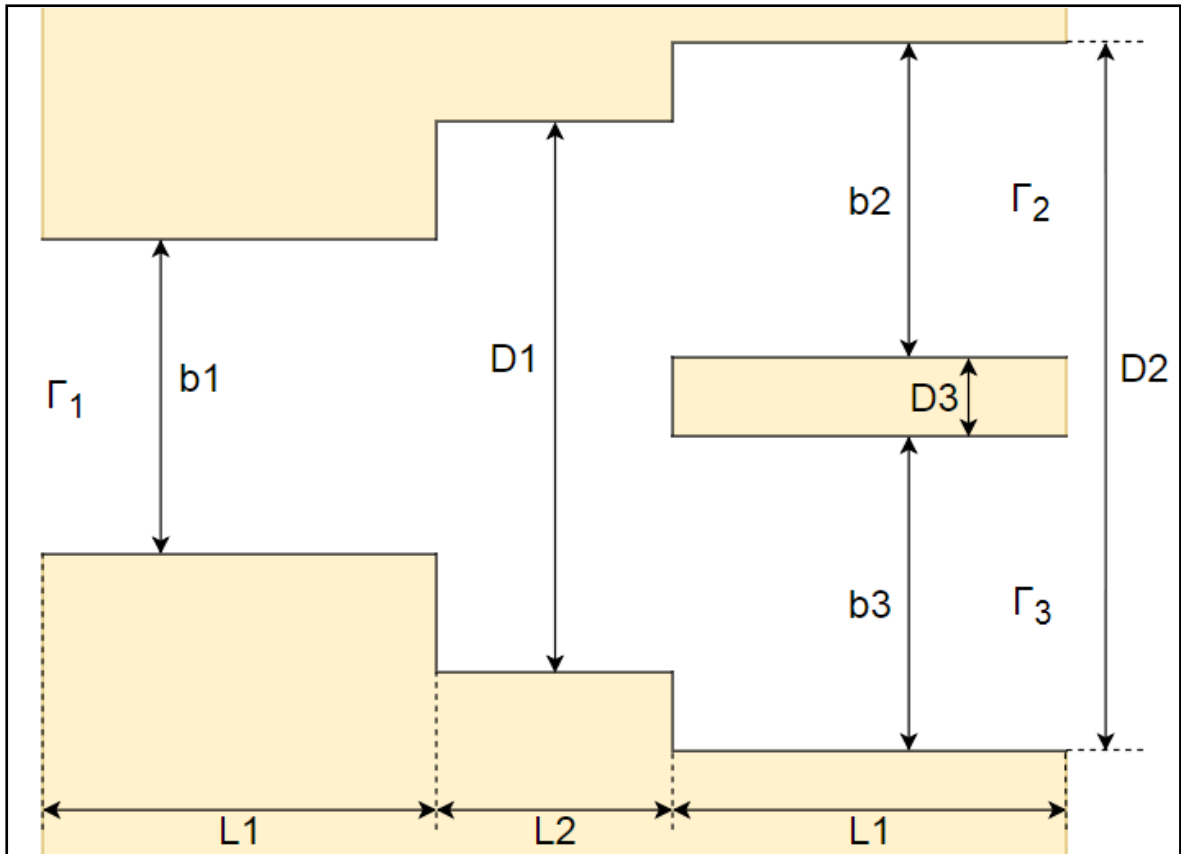


Figura 5.6: Modelo 1 divisor de potencia plano E

Donde las dimensiones que se muestran en la figura se encuentran definidas en la siguiente tabla [8]:

	Valor	Dimensión
a	10.5	mm
b1	5	mm
b2	5	mm
b3	5	mm
L1	15	mm
L2	7.7	mm
D1	7	mm
D2	10.1	mm
D3	0.1	mm

Tabla 5.5: Dimensiones modelo 1 divisor de potencia plano E

En cuanto al rango de frecuencias para el cual se simulará este divisor será entre los 16 – 18 GHz.

Para aplicar el método de elementos finitos sobre el dispositivo (Figura 5.6) el primer paso que se debe aplicar es dividir el área total bajo estudio en elementos independientes. El resultado del mallado queda como:

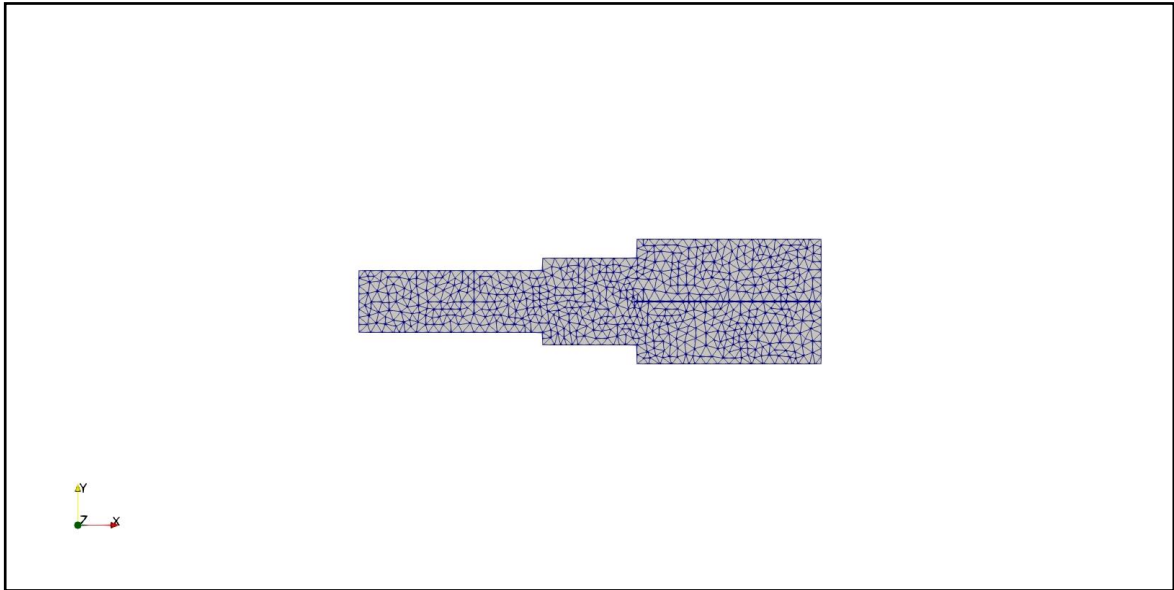


Figura 5.7: Mesh modelo 1 divisor de potencia plano E. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

En las siguientes dos gráficas se mostrarán el módulo de la matriz de dispersión y la fase de la matriz de dispersión:

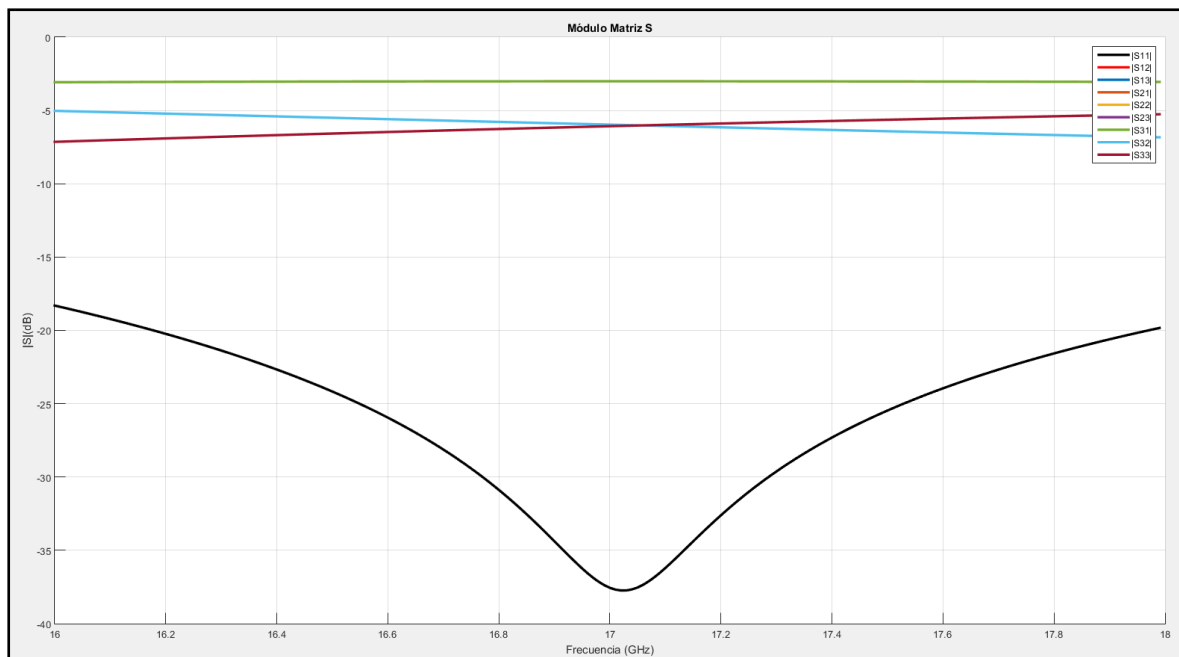


Figura 5.8: Módulo matriz S divisor modelo 1

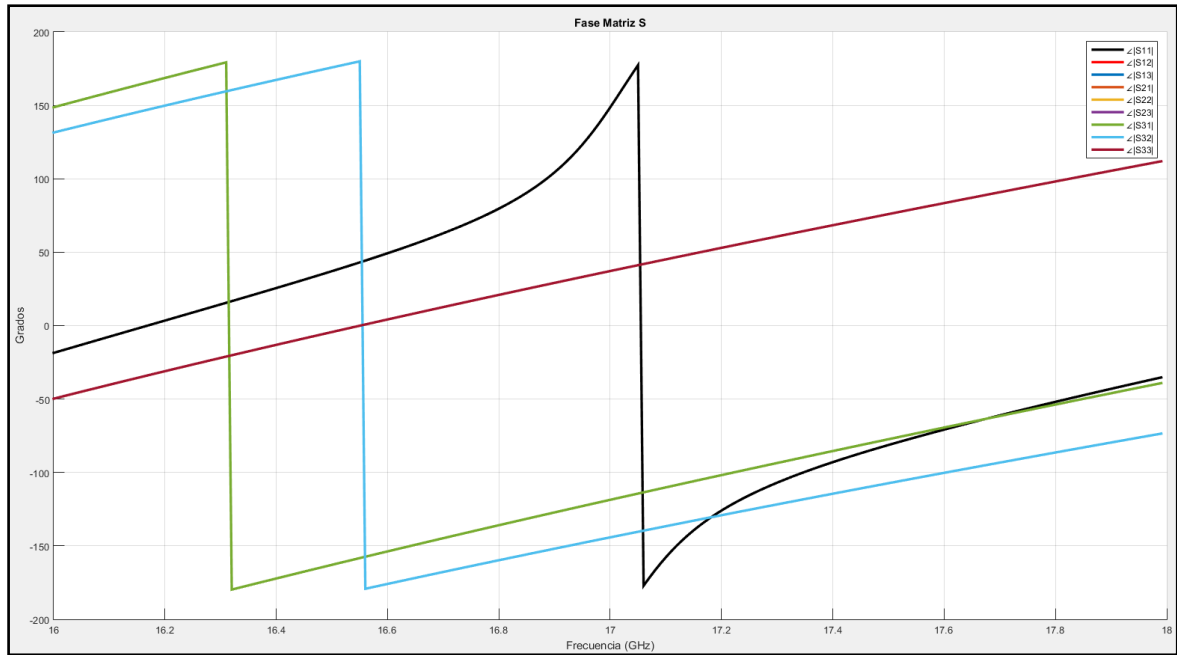


Figura 5.9: Fase matriz S divisor modelo 1

5.4.2 Segundo modelo de divisor

El segundo modelo de divisor de potencia plano E que se analizará se representa en la siguiente figura:

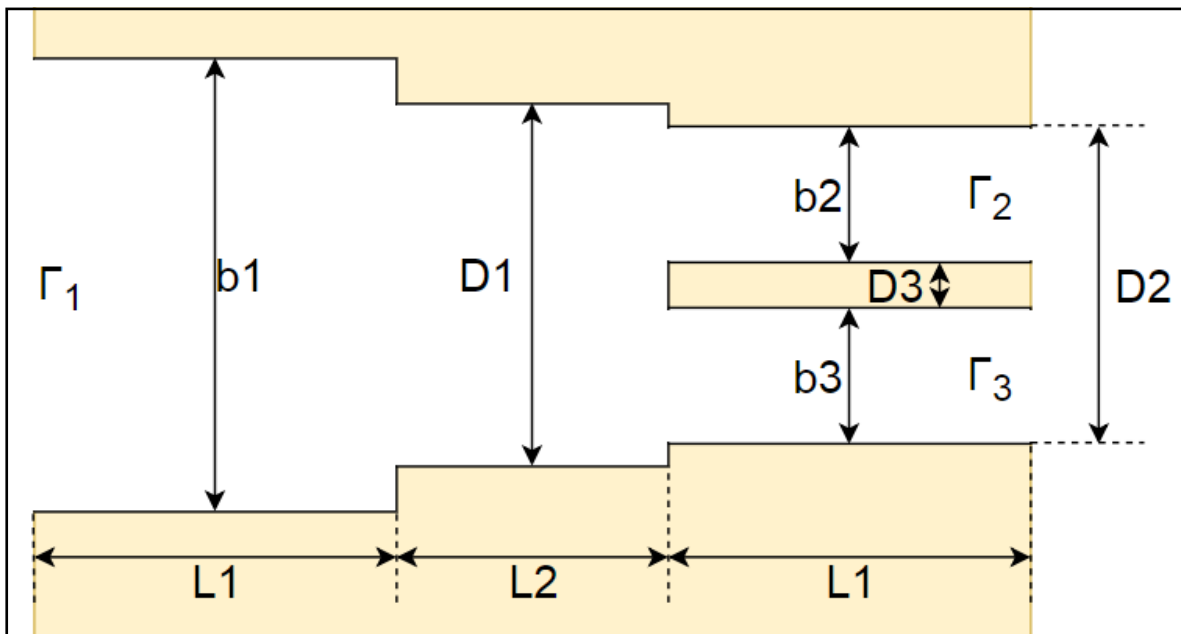


Figura 5.10: Modelo 2 divisor de potencia plano E

Donde las dimensiones que se muestran en la figura se encuentran definidas en la siguiente tabla [8]:

	Valor	Dimensión
a	10.5	mm
b1	5	mm
b2	1.25	mm
b3	1.25	mm
L1	15	mm
L2	7.88	mm
D1	3.5	mm
D2	2.6	mm
D3	0.1	mm

Tabla 5.6: Dimensiones modelo 2 divisor de potencia plano E

En cuanto al rango de frecuencias para el cual se simulará este divisor será entre los 16 – 18 GHz.

Para aplicar el método de elementos finitos sobre el dispositivo (Figura 5.10) el primer paso que se debe aplicar es dividir el área total bajo estudio en elementos independientes. El resultado del mallado queda como:

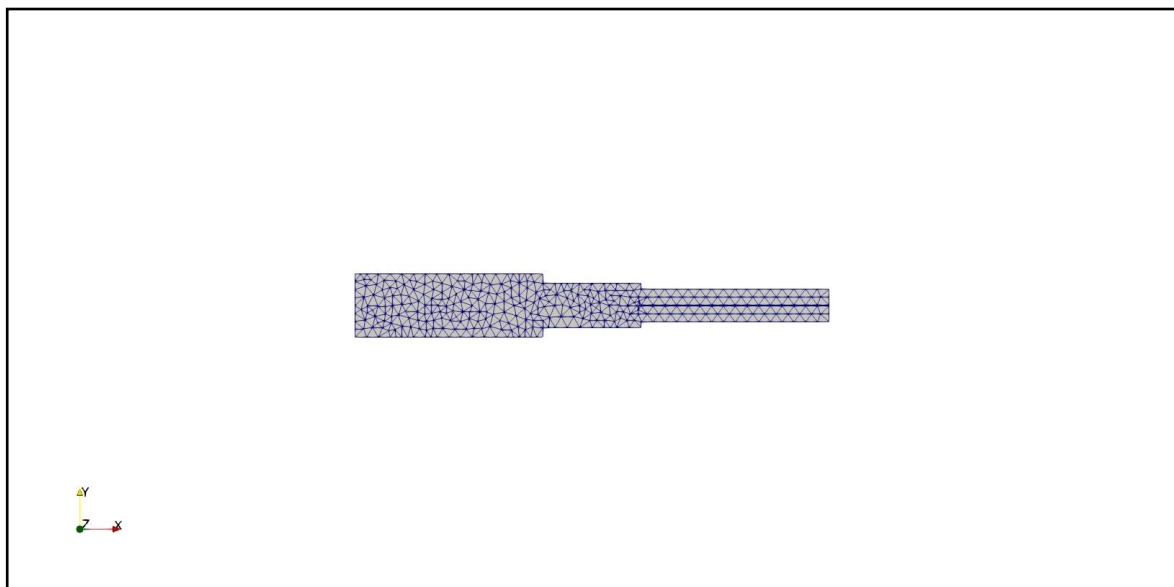


Figura 5.11: Mesh modelo 2 divisor de potencia plano E. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

En las siguientes dos gráficas se mostrarán el módulo de la matriz de dispersión y la fase de la matriz de dispersión:

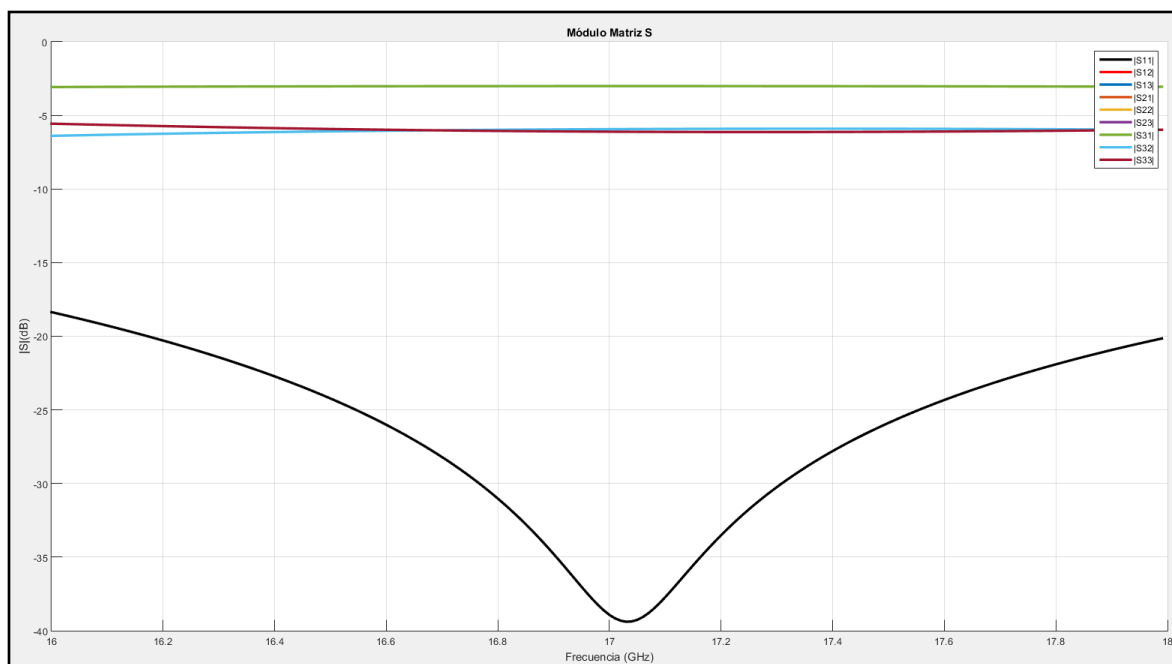


Figura 5.12: Módulo matriz S divisor modelo 2

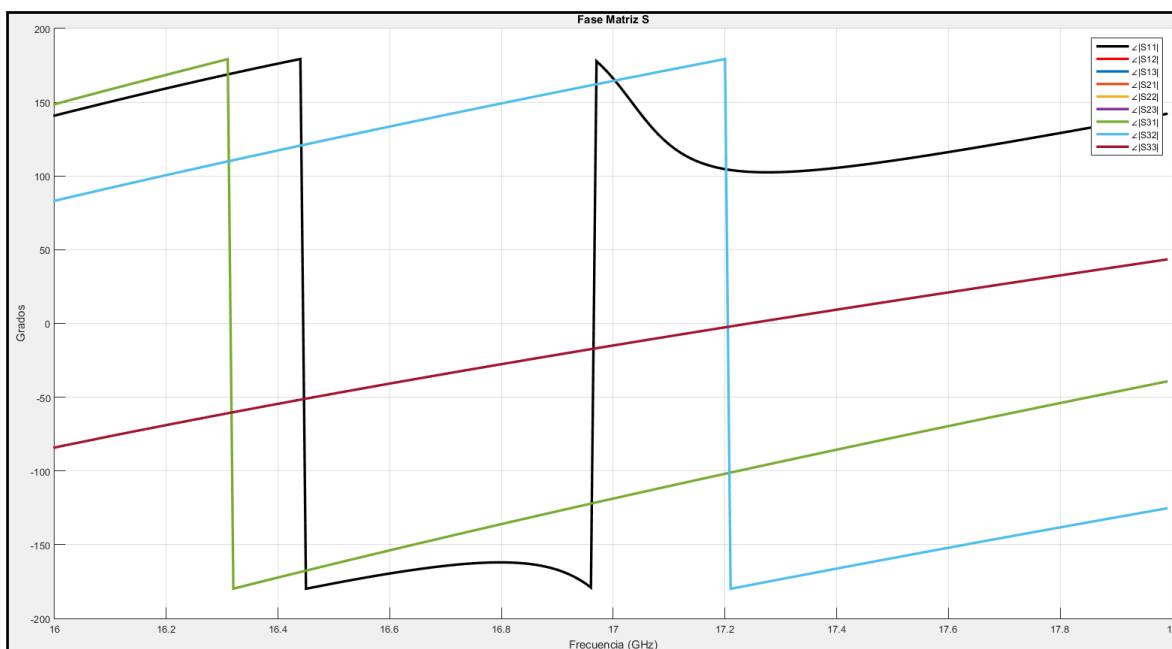


Figura 5.13: Fase matriz S divisor modelo 2

5.4.3 Tercer modelo de divisor

El tercer, y último, modelo de divisor de potencia plano E que se analizará tendrá la particularidad de que no cuenta con sección adaptadora. El dibujo esquemático de este divisor se encuentra en la siguiente figura:

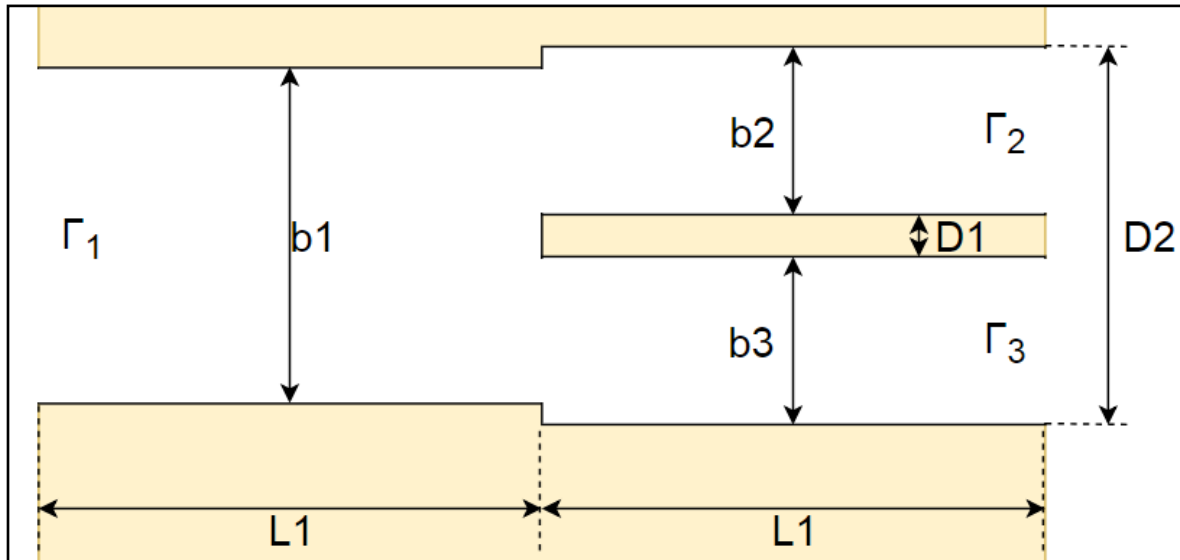


Figura 5.14: Modelo 3 divisor de potencia plano E

Donde los valores de las dimensiones mostradas en la figura anterior se encuentran en la siguiente tabla [8]:

	Valor	Dimensión
a	10.5	mm
b1	5	mm
b2	2.5	mm
b3	2.5	mm
L1	15	mm
D1	0.1	mm
D2	5.1	mm

Tabla 5.7: Dimensiones modelo 3 divisor de potencia plano E

En cuanto al rango de frecuencias para el cual se simulará este divisor será entre los 16 – 18 GHz.

Para aplicar el método de elementos finitos sobre el dispositivo (Figura 5.14) el primer paso que se debe aplicar es dividir el área total bajo estudio en elementos independientes. El resultado del mallado queda como:

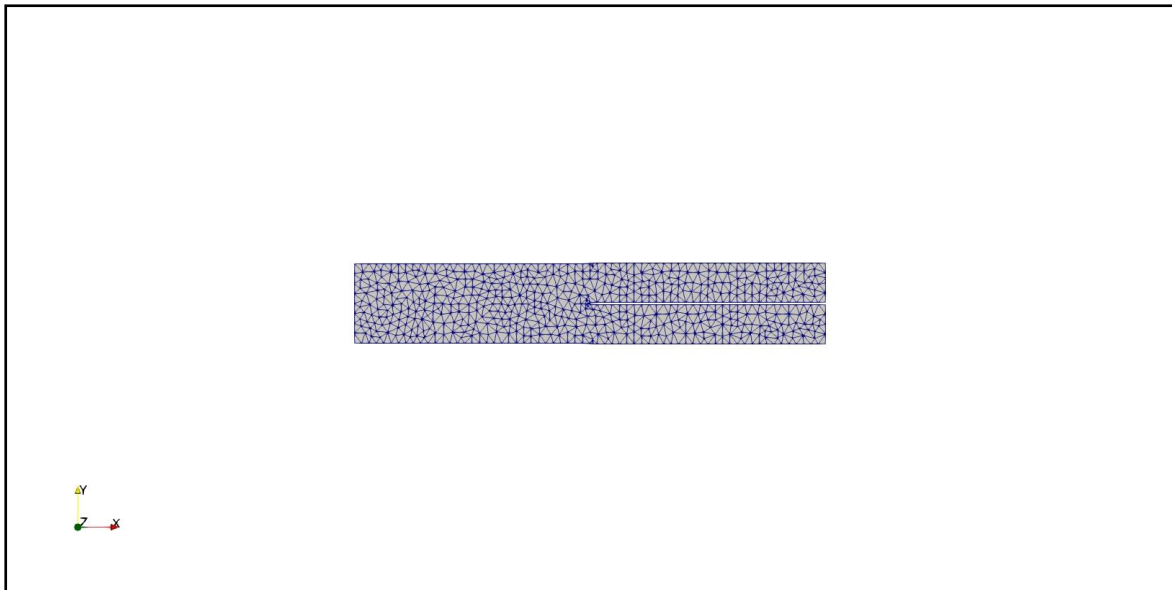


Figura 5.15: Mesh modelo 3 divisor de potencia plano E. N° Elementos: 803. Grados de Libertad: 2044

En las siguientes dos gráficas se mostrarán el módulo de la matriz de dispersión y la fase de la matriz de dispersión del divisor de potencia:

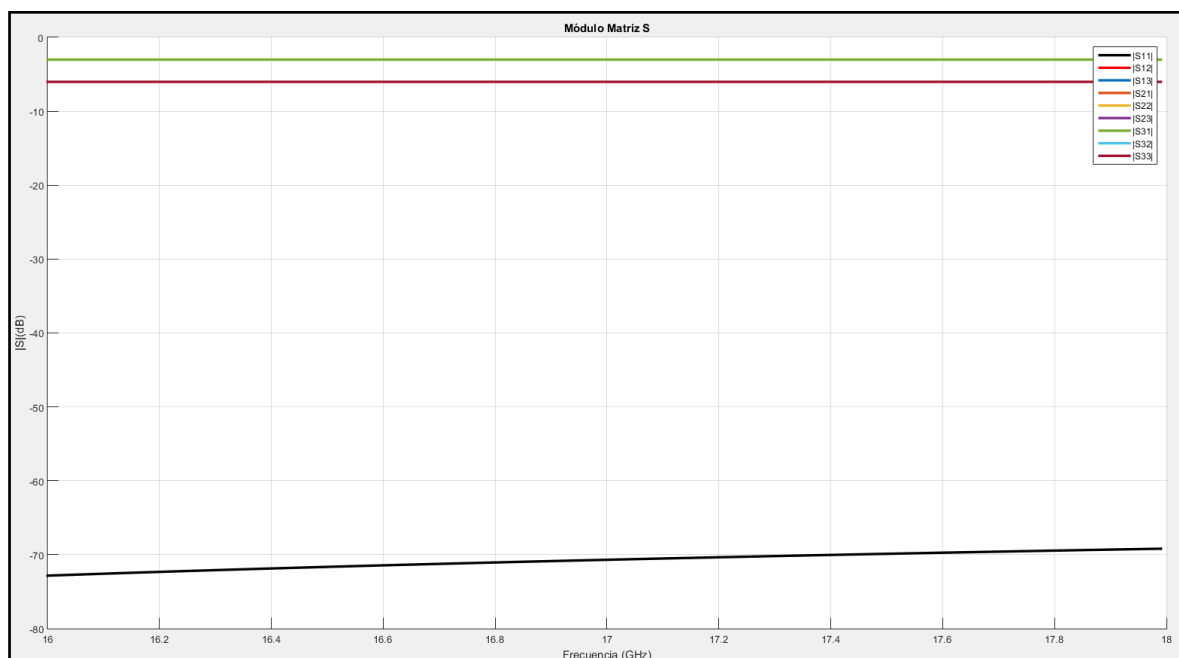


Figura 5.16: Módulo matriz S divisor modelo 3

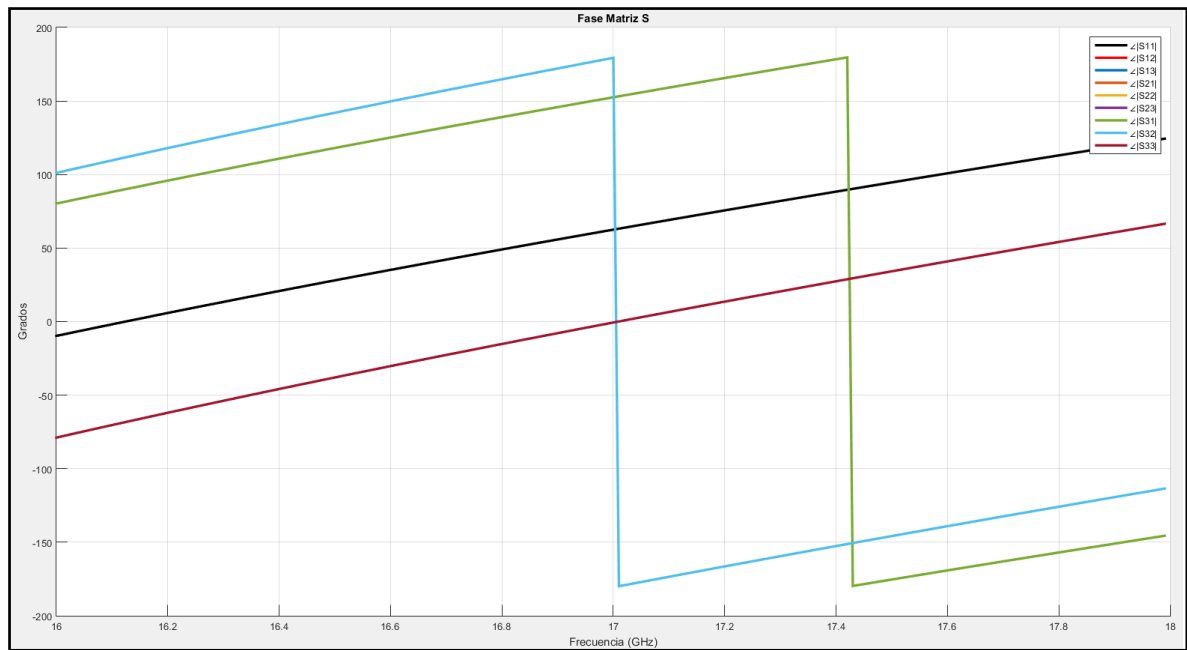


Figura 5.17: Fase matriz S divisor modelo 3

6 Conclusiones y trabajo futuro

6.1 Conclusiones

Este proyecto de fin de master ha consistido en el estudio de dispositivos en guías de ondas rectangulares tanto en plano E como en plano H. El análisis y estudio de estos dispositivos se ha llevado a cabo mediante el método de elementos finitos.

A forma de introducción al método de elementos finitos se han resuelto tres casos sencillos de guías rectangulares donde se han ido variando en estos tres casos la relación a/b . Estos ejemplos se han obtenido el número de onda al cuadrado y se ha comparado con los valores teóricos, obteniendo una diferencia mínima entre ambos valores.

Tras la introducción al método de elementos finitos se han estudiado los dispositivos en guías de ondas rectangulares en plano H. En este apartado, se ha partido con una introducción teórica donde se ha expuesto los desarrollos matemáticos necesarios para poder obtener la matriz de dispersión de un dispositivo en guía de onda rectangular en plano H genérico, excitado con el modo fundamental TE_{10} . Tras exponer la formulación se ha comprobado la misma con unos ejemplos sencillos de una guía de onda rectangular terminada en un plano de conductor perfecto. Finalmente en este apartado se han analizado tres dispositivos plano H complejos.

Finalmente, en el trabajo se han estudiado los dispositivos en guías de ondas rectangulares en plano E. Este apartado ha seguido la misma distribución que en el caso del plano H, partiendo de la formulación necesaria para el estudio en FEM del dispositivo plano E y su posterior comprobación, y finalizando con el análisis de tres dispositivos plano E.

Como conclusión general del trabajo se puede obtener que el análisis de dispositivos en guías de ondas rectangulares tanto en plano E como en plano H mediante el método de elementos finitos es de alta calidad y precisión pudiendo equipararse a otros análisis que se obtienen de programas como CST. Como resultado de este trabajo se han implementado dos programas en FEniCS, en los cuales definiendo los puntos de la geometría del dispositivo a analizar se obtienen los valores de la matriz de dispersión del dispositivo.

6.2 Trabajo futuro

El posible trabajo futuro para este proyecto de fin de master se puede dividir en dos ramas.

La primera consistiría en una generalización y mayor automatización de los programas desarrollados. Esto podría realizarse de forma que se pueda especificar como parámetro de entrada el número de puertas del dispositivo o en que ejes se encuentran los puertos.

La segunda opción para desarrollar este trabajo sería considerar distintos modos en la guía y no solo tener en consideración el modo fundamental de las guías de ondas rectangulares TE_{10} . Esto podría ampliar la complejidad del análisis y dispositivos que se puedan analizar con el programa.

Aparte de estas dos mejoras en los programas implementados de manera adicional se podría generar un programa que comparara de manera automática el error entre el análisis FEM y otros análisis como los realizados mediante programas comerciales como CST.

Referencias

- [1] **Giuseppe Pelosi, Roberto Coccioli, Stefano Selleri**, “Quick finite elements for electromagnetic waves”, 2nd Edition, Artech House, 2009.
- [2] **O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor**, “The finite element method: Volume 1”, 5th Edition, Butterworth Heinemann, 2000.
- [3] **Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells**, “Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book”, 2011.
- [4] EIA Standard WR51.
- [5] **David M. Pozar**, “Microwave Engineering”, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2005.
- [6] **Jorge Alfonso Ruiz Cruz**, Medios de transmisión, Asignatura “Medios de transmisión”, Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid.
- [7] **Manuel González Tejerina**, PFC “Simulación y diseño de un filtro de doble banda en guía de onda rectangular en banda X”, Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid.
- [8] **Pablo Pascual García**, PFC “Modelos de análisis y diseño de dispositivos en guía integrada en sustrato para banda KU”, Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid.

Glosario

FEM	Finite Element Method
RSE	Relative Standard Error
TEM	Transversal Electromagnético
TE	Transversal Eléctrico
TM	Transversal Magnético

Anexos

A Dimensiones acoplador de 8 puertas

En la siguiente tabla se especifican los puntos en el plano 2D “XZ” en mm del acoplador

X	Z	Dimensión
-20.388	-71.874	mm
-33.342	-71.874	mm
-33.342	-57.302	mm
-31.356	-57.302	mm
-31.356	-47.237	mm
-30.760	-47.237	mm
-30.760	-36.582	mm
-29.376	-36.582	mm
-29.376	-31.624	mm
-27.238	-31.624	mm
-27.238	-25.463	mm
-26.024	-25.463	mm
-26.024	-24.249	mm
-27.238	-24.249	mm
-27.238	-1.214	mm
-26.024	-1.214	mm
-26.024	0.000	mm
-27.238	0.000	mm
-27.238	6.161	mm
-29.376	6.161	mm
-29.376	11.119	mm
-30.760	11.119	mm
-30.760	21.774	mm
-31.356	21.774	mm
-31.356	31.839	mm
-33.342	31.839	mm
-33.342	46.411	mm
-20.388	46.411	mm
-20.388	31.839	mm
-18.548	31.839	mm
-18.548	21.774	mm
-17.729	21.774	mm
-17.729	11.119	mm
-15.570	11.119	mm
-15.570	6.161	mm
-14.618	6.161	mm
-14.618	16.156	mm
-12.853	16.156	mm
-12.853	17.370	mm
-14.168	17.370	mm

-14.168	24.724	mm
-12.911	24.724	mm
-12.911	25.938	mm
-14.168	25.938	mm
-14.168	46.390	mm
-1.214	46.390	mm
-1.214	25.938	mm
-2.470	25.938	mm
-2.470	24.724	mm
-1.214	24.724	mm
-1.214	17.370	mm
-2.528	17.37	mm
-2.528	16.156	mm
-0.764	16.156	mm
-0.764	6.161	mm
0.764	6.161	mm
0.764	16.156	mm
2.528	16.156	mm
2.528	17.370	mm
1.214	17.370	mm
1.214	24.724	mm
2.470	24.724	mm
2.470	25.938	mm
1.214	25.938	mm
1.214	46.390	mm
14.168	46.39	mm
14.168	25.938	mm
12.911	25.938	mm
12.911	24.724	mm
14.168	24.724	mm
14.168	17.370	mm
12.853	17.370	mm
12.853	16.156	mm
14.618	16.156	mm
14.618	6.161	mm
15.570	6.161	mm
15.570	11.119	mm
17.729	11.119	mm
17.729	21.774	mm
18.548	21.774	mm
18.548	31.839	mm
20.388	31.839	mm
20.388	46.411	mm
33.342	46.411	mm
33.342	31.839	mm
31.356	31.839	mm
31.356	21.774	mm
30.760	21.774	mm

30.760	11.119	mm
29.376	11.119	mm
29.376	6.161	mm
27.238	6.161	mm
27.238	0.00	mm
26.024	0.00	mm
26.024	-1.214	mm
27.238	-1.214	mm
27.238	-24.249	mm
26.024	-24.249	mm
26.024	-25.463	mm
27.238	-25.463	mm
27.238	-31.624	mm
29.376	-31.624	mm
29.376	-36.582	mm
30.760	-36.582	mm
30.760	-47.237	mm
31.356	-47.237	mm
31.356	-57.302	mm
33.342	-57.302	mm
33.342	-71.874	mm
20.388	-71.874	mm
20.388	-57.302	mm
18.548	-57.302	mm
18.548	-47.237	mm
17.729	-47.237	mm
17.729	-36.582	mm
15.570	-36.582	mm
15.570	-31.624	mm
14.618	-31.624	mm
14.618	-41.619	mm
12.853	-41.619	mm
12.853	-42.833	mm
14.168	-42.833	mm
14.168	-50.187	mm
12.911	-50.187	mm
12.911	-51.401	mm
14.168	-51.401	mm
14.168	-71.853	mm
1.214	-71.853	mm
1.214	-51.401	mm
2.470	-51.401	mm
2.470	-50.187	mm
1.214	-50.187	mm
1.214	-42.833	mm
2.528	-42.833	mm
2.528	-41.619	mm
0.764	-41.619	mm

0.764	-31.624	mm
-0.764	-31.624	mm
-0.764	-41.619	mm
-2.528	-41.619	mm
-2.528	-42.833	mm
-1.214	-42.833	mm
-1.214	-50.187	mm
-2.470	-50.187	mm
-2.470	-51.401	mm
-1.214	-51.401	mm
-1.214	-71.853	mm
-14.168	-71.853	mm
-14.168	-51.401	mm
-12.911	-51.401	mm
-12.911	-50.187	mm
-14.168	-50.187	mm
-14.168	-42.833	mm
-12.853	-42.833	mm
-12.853	-41.619	mm
-14.618	-41.619	mm
-14.618	-31.624	mm
-15.570	-31.624	mm
-15.570	-36.582	mm
-17.729	-36.582	mm
-17.729	-47.237	mm
-18.548	-47.237	mm
-18.548	-57.302	mm
-20.388	-57.302	mm

PRESUPUESTO

1) Ejecución Material

- Compra de ordenador personal (Software incluido)..... 1200 €
- Alquiler de impresora láser durante 6 meses 50 €
- Material de oficina 70 €
- Total de ejecución material 1000 €

2) Gastos generales

- 16 % sobre Ejecución Material 238 €

3) Beneficio Industrial

- 6 % sobre Ejecución Material 86.25 €

4) Honorarios Proyecto

- 800 horas a 15 € / hora..... 12000 €

5) Material fungible

- Gastos de impresión..... 80 €
- Encuadernación..... 20 €

6) Subtotal del presupuesto

- Subtotal Presupuesto..... 16768.30€

7) I.V.A. aplicable

- 21% Subtotal Presupuesto 3521.343 €

8) Total presupuesto

- Total Presupuesto..... 20289.643 €

Madrid, Septiembre de 2018

El Ingeniero Jefe de Proyecto

Fdo.: Álvaro Antequera González
Ingeniero de Telecomunicación

PLIEGO DE CONDICIONES

Este documento contiene las condiciones legales que guiarán la realización, en este proyecto, de un *Método de los elementos finitos para el análisis y diseño de dispositivos de radiocomunicaciones en guía de onda de tipo plano H y plano E*. En lo que sigue, se supondrá que el proyecto ha sido encargado por una empresa cliente a una empresa consultora con la finalidad de realizar dicho sistema. Dicha empresa ha debido desarrollar una línea de investigación con objeto de elaborar el proyecto. Esta línea de investigación, junto con el posterior desarrollo de los programas está amparada por las condiciones particulares del siguiente pliego.

Supuesto que la utilización industrial de los métodos recogidos en el presente proyecto ha sido decidida por parte de la empresa cliente o de otras, la obra a realizar se regulará por las siguientes:

Condiciones generales

1. La modalidad de contratación será el concurso. La adjudicación se hará, por tanto, a la proposición más favorable sin atender exclusivamente al valor económico, dependiendo de las mayores garantías ofrecidas. La empresa que somete el proyecto a concurso se reserva el derecho a declararlo desierto.

2. El montaje y mecanización completa de los equipos que intervengan será realizado totalmente por la empresa licitadora.

3. En la oferta, se hará constar el precio total por el que se compromete a realizar la obra y el tanto por ciento de baja que supone este precio en relación con un importe límite si este se hubiera fijado.

4. La obra se realizará bajo la dirección técnica de un Ingeniero Superior de Telecomunicación, auxiliado por el número de Ingenieros Técnicos y Programadores que se estime preciso para el desarrollo de la misma.

5. Aparte del Ingeniero Director, el contratista tendrá derecho a contratar al resto del personal, pudiendo ceder esta prerrogativa a favor del Ingeniero Director, quien no estará obligado a aceptarla.

6. El contratista tiene derecho a sacar copias a su costa de los planos, pliego de condiciones y presupuestos. El Ingeniero autor del proyecto autorizará con su firma las copias solicitadas por el contratista después de confrontarlas.

7. Se abonará al contratista la obra que realmente ejecute con sujeción al proyecto que sirvió de base para la contratación, a las modificaciones autorizadas por la superioridad o a las órdenes que con arreglo a sus facultades le hayan comunicado por escrito al Ingeniero Director de obras siempre que dicha obra se haya ajustado a los preceptos de los pliegos de condiciones, con arreglo a los cuales, se harán las modificaciones y la valoración de las diversas unidades sin que el importe total pueda exceder de los presupuestos aprobados. Por consiguiente, el número de unidades que se consignan en el proyecto o en el presupuesto, no podrá servirle de fundamento para entablar reclamaciones de ninguna clase, salvo en los casos de rescisión.

8. Tanto en las certificaciones de obras como en la liquidación final, se abonarán los trabajos realizados por el contratista a los precios de ejecución material que figuran en el presupuesto para cada unidad de la obra.

9. Si excepcionalmente se hubiera ejecutado algún trabajo que no se ajustase a las condiciones de la contrata pero que sin embargo es admisible a juicio del Ingeniero Director de obras, se dará conocimiento a la Dirección, proponiendo a la vez la rebaja de precios que el Ingeniero estime justa y si la Dirección resolviera aceptar la obra, quedará el contratista obligado a conformarse con la rebaja acordada.

10. Cuando se juzgue necesario emplear materiales o ejecutar obras que no figuren en el presupuesto de la contrata, se evaluará su importe a los precios asignados a otras obras o materiales análogos si los hubiere y cuando no, se discutirán entre el Ingeniero Director y el contratista, sometiéndolos a la aprobación de la Dirección. Los nuevos precios convenidos por uno u otro procedimiento, se sujetarán siempre al establecido en el punto anterior.

11. Cuando el contratista, con autorización del Ingeniero Director de obras, emplee materiales de calidad más elevada o de mayores dimensiones de lo estipulado en el proyecto, o sustituya una clase de fabricación por otra que tenga asignado mayor precio o ejecute con mayores dimensiones cualquier otra parte de las obras, o en general, introduzca en ellas cualquier modificación que sea beneficiosa a juicio del Ingeniero Director de obras, no tendrá derecho sin embargo, sino a lo que le correspondería si hubiera realizado la obra con estricta sujeción a lo proyectado y contratado.

12. Las cantidades calculadas para obras accesorias, aunque figuren por partida alzada en el presupuesto final (general), no serán abonadas sino a los precios de la contrata, según las condiciones de la misma y los proyectos particulares que para ellas se formen, o en su defecto, por lo que resulte de su medición final.

13. El contratista queda obligado a abonar al Ingeniero autor del proyecto y director de obras así como a los Ingenieros Técnicos, el importe de sus respectivos honorarios facultativos por formación del proyecto, dirección técnica y administración en su caso, con arreglo a las tarifas y honorarios vigentes.

14. Concluida la ejecución de la obra, será reconocida por el Ingeniero Director que a tal efecto designe la empresa.

15. La garantía definitiva será del 4% del presupuesto y la provisional del 2%.

16. La forma de pago será por certificaciones mensuales de la obra ejecutada, de acuerdo con los precios del presupuesto, deducida la baja si la hubiera.

17. La fecha de comienzo de las obras será a partir de los 15 días naturales del replanteo oficial de las mismas y la definitiva, al año de haber ejecutado la provisional, procediéndose si no existe reclamación alguna, a la reclamación de la fianza.

18. Si el contratista al efectuar el replanteo, observase algún error en el proyecto, deberá comunicarlo en el plazo de quince días al Ingeniero Director de obras, pues transcurrido ese plazo será responsable de la exactitud del proyecto.

19. El contratista está obligado a designar una persona responsable que se entenderá con el Ingeniero Director de obras, o con el delegado que éste designe, para todo relacionado con ella. Al ser el Ingeniero Director de obras el que interpreta el proyecto, el contratista deberá consultarle cualquier duda que surja en su realización.

20. Durante la realización de la obra, se girarán visitas de inspección por personal facultativo de la empresa cliente, para hacer las comprobaciones que se crean oportunas. Es obligación del

contratista, la conservación de la obra ya ejecutada hasta la recepción de la misma, por lo que el deterioro parcial o total de ella, aunque sea por agentes atmosféricos u otras causas, deberá ser reparado o reconstruido por su cuenta.

21. El contratista, deberá realizar la obra en el plazo mencionado a partir de la fecha del contrato, incurriendo en multa, por retraso de la ejecución siempre que éste no sea debido a causas de fuerza mayor. A la terminación de la obra, se hará una recepción provisional previo reconocimiento y examen por la dirección técnica, el depositario de efectos, el interventor y el jefe de servicio o un representante, estampando su conformidad el contratista.

22. Hecha la recepción provisional, se certificará al contratista el resto de la obra, reservándose la administración el importe de los gastos de conservación de la misma hasta su recepción definitiva y la fianza durante el tiempo señalado como plazo de garantía. La recepción definitiva se hará en las mismas condiciones que la provisional, extendiéndose el acta correspondiente. El Director Técnico propondrá a la Junta Económica la devolución de la fianza al contratista de acuerdo con las condiciones económicas legales establecidas.

23. Las tarifas para la determinación de honorarios, reguladas por orden de la Presidencia del Gobierno el 19 de Octubre de 1961, se aplicarán sobre el denominado en la actualidad "Presupuesto de Ejecución de Contrata" y anteriormente llamado "Presupuesto de Ejecución Material" que hoy designa otro concepto.

Condiciones particulares

La empresa consultora, que ha desarrollado el presente proyecto, lo entregará a la empresa cliente bajo las condiciones generales ya formuladas, debiendo añadirse las siguientes condiciones particulares:

1. La propiedad intelectual de los procesos descritos y analizados en el presente trabajo, pertenece por entero a la empresa consultora representada por el Ingeniero Director del Proyecto.

2. La empresa consultora se reserva el derecho a la utilización total o parcial de los resultados de la investigación realizada para desarrollar el siguiente proyecto, bien para su publicación o bien para su uso en trabajos o proyectos posteriores, para la misma empresa cliente o para otra.

3. Cualquier tipo de reproducción aparte de las reseñadas en las condiciones generales, bien sea para uso particular de la empresa cliente, o para cualquier otra aplicación, contará con autorización expresa y por escrito del Ingeniero Director del Proyecto, que actuará en representación de la empresa consultora.

4. En la autorización se ha de hacer constar la aplicación a que se destinan sus reproducciones así como su cantidad.

5. En todas las reproducciones se indicará su procedencia, explicitando el nombre del proyecto, nombre del Ingeniero Director y de la empresa consultora.

6. Si el proyecto pasa la etapa de desarrollo, cualquier modificación que se realice sobre él, deberá ser notificada al Ingeniero Director del Proyecto y a criterio de éste, la empresa consultora decidirá aceptar o no la modificación propuesta.

7. Si la modificación se acepta, la empresa consultora se hará responsable al mismo nivel que el proyecto inicial del que resulta el añadirla.

8. Si la modificación no es aceptada, por el contrario, la empresa consultora declinará toda responsabilidad que se derive de la aplicación o influencia de la misma.

9. Si la empresa cliente decide desarrollar industrialmente uno o varios productos en los que resulte parcial o totalmente aplicable el estudio de este proyecto, deberá comunicarlo a la empresa consultora.

10. La empresa consultora no se responsabiliza de los efectos laterales que se puedan producir en el momento en que se utilice la herramienta objeto del presente proyecto para la realización de otras aplicaciones.

11. La empresa consultora tendrá prioridad respecto a otras en la elaboración de los proyectos auxiliares que fuese necesario desarrollar para dicha aplicación industrial, siempre que no haga explícita renuncia a este hecho. En este caso, deberá autorizar expresamente los proyectos presentados por otros.

12. El Ingeniero Director del presente proyecto, será el responsable de la dirección de la aplicación industrial siempre que la empresa consultora lo estime oportuno. En caso contrario, la persona designada deberá contar con la autorización del mismo, quien delegará en él las responsabilidades que ostente.